



Apuntes de Teoría Electromagnética

A. J. Zozaya

Laboratorio de Electromagnetismo Aplicado ([LaBeMa](#)),
Facultad de Ingeniería,
Universidad de Carabobo.
Valencia, febrero de 2017

Prefacio

Estos Apuntes de Teoría Electromagnética son el resultado de mi experiencia como profesor de las cátedras de Teoría Electromagnética I y II de los currículos de Ingeniería Eléctrica e Ingeniería en Telecomunicaciones de la Universidad de Carabobo, Valencia, Venezuela, desde 1994 hasta la fecha de hoy. Recogen los principales conceptos y formulaciones matemáticas desarrollados en clase y constituyen un importante material de apoyo en el estudio concienzudo de las asignaturas Teoría Electromagnética I y II mencionadas. Con todo, como siempre hemos recomendado los libros clásicos del área como las mejores fuentes del conocimiento, estos apuntes han de servir de acompañamiento en el proceso de aprendizaje del estudiante.

Este libro consta de 11 capítulos. En el primer capítulo se hace una revisión de los conceptos principales del Análisis Vectorial, el cual constituye un elegante cuerpo de las matemáticas apropiadamente natural para describir el electromagnetismo. En los siguientes 6 capítulos (capítulos del 2 al 7) se desarrollan, siguiendo el método inductivo, yendo de lo particular a lo general, los conceptos de campo electrostático, problemas con valores en la frontera, corriente eléctrica, magnetostática, del campo eléctrico al magnético a través de la relatividad especial y campos variables en el tiempo. El Capítulo 8 está dedicado a las Ecuaciones de Maxwell y a su solución en el dominio de la frecuencia. En los capítulos subsiguientes (capítulos del 9 al 11) se sigue un método deductivo y se desarrollan algunas aplicaciones de las Ecuaciones de MAXWELL en el dominio de la frecuencia, a saber: ondas planas, principios de radiación y ondas guiadas.

A. J. Zozaya

Índice general

1. Análisis Vectorial	1
1.1. Sistemas de coordenadas	1
1.1.1. Transformación de coordenadas	4
1.2. Gradiente de un campo escalar	6
1.3. Estructura espacial del campo	8
1.4. Divergencia de un campo vectorial	9
1.4.1. Integral de flujo	9
1.4.2. Definición de la divergencia de un campo vectorial	10
1.4.3. Teorema de la divergencia	12
1.5. Rotacional de un campo vectorial	16
1.5.1. Integral de circulación	16
1.5.2. Definición de rotacional	18
1.5.3. Teorema de STOKES	20
1.5.4. Definición alternativa del rotacional de un campo vectorial	22
1.6. Identidades nulas	23
1.6.1. $\nabla \times (\nabla V) = 0$	23
1.6.2. $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{J}) = 0$	25
1.7. Condiciones de borde	26
1.8. Teorema de HELMHOLTZ	27
1.8.1. Dominios abiertos	27
1.8.2. Dominios cerrados	33
1.9. Problemas propuestos	33
2. Campo Electrostático	35
2.1. Ley de COULOMB	35
2.2. Campo electrostático	35
2.2.1. Divergencia del campo electrostático	39
2.2.2. Rotacional del campo electrostático	40

2.2.3.	Ecuaciones de MAXWELL para el campo electrostático	40
2.3.	Ley de GAUSS	41
2.3.1.	Uso práctico de la Ley de GAUSS	42
2.4.	Potencial electrostático	43
2.5.	Medios materiales inmersos en un campo electrostático	45
2.5.1.	Conductores	46
2.5.2.	Dipolo eléctrico	47
2.5.3.	Interacción dipolo-campo eléctrico	49
2.5.4.	Dieléctricos	49
2.6.	Energía electrostática	55
2.6.1.	Capacitancia	57
2.7.	Problemas propuestos	58
3.	Problemas con Valores en la Frontera	61
3.1.	Teorema de la Unicidad	63
3.2.	Problemas con valores en la frontera en una dimensión	65
3.3.	Problemas con valores en la frontera en dominios rectangulares 2D	69
3.4.	Teoría de imágenes	73
3.5.	Problemas propuestos	74
4.	Corriente eléctrica	76
4.1.	Densidad de corriente	76
4.1.1.	Conservación de la carga o continuidad de la corriente	77
4.1.2.	Tiempo de expansión o de relajación	78
4.1.3.	Resistencia	79
5.	Magnetostática	81
5.1.	Ley de fuerza de AMPERE	81
5.2.	Campo magnetostático	82
5.2.1.	Ley de BIOT-SAVART	82
5.2.2.	Campo de una carga puntual	82
5.2.3.	Campo de una distribución cualquiera de corriente	83
5.3.	Divergencia del campo magnetostático	84
5.3.1.	Vector potencial magnético	84
5.4.	Rotacional del campo magnetostático	85
5.5.	Ley circuital de AMPERE	86
5.6.	Medios materiales inmersos en un campo magnetostático	88

5.6.1.	Dipolo magnético	88
5.6.2.	Imanación o polarización magnética	90
5.6.3.	Ley de AMPERE en el interior de un medio material	92
5.6.4.	Condiciones en la frontera	95
5.7.	Energía magnética	95
5.7.1.	Inductancia	95
5.8.	Mini-proyectos	96
5.8.1.	Mini-proyecto 1	96
5.9.	Calculo del rotacional del campo de inducción magnética	97
5.9.1.	Procedimiento primero.	97
5.9.2.	Procedimiento segundo	99
6.	De E a B a través de la relatividad especial	100
6.1.	Ecuaciones de transformación de LORENTZ	101
6.1.1.	Contracción de LORENTZ	102
6.1.2.	Dilatación temporal	103
6.2.	Transformación de velocidades, masas y fuerzas	103
6.2.1.	Transformación de velocidades	103
6.2.2.	Transformación de la masa	104
6.2.3.	Transformación de las fuerzas	105
6.3.	Transformación de la ley de Coulomb	105
6.4.	Conclusión	109
7.	Campos variables en el tiempo	110
7.1.	Ley de inducción de FARADAY	110
7.1.1.	Conductor que se mueve en un campo magnético	111
7.1.2.	Caso general de la inducción	112
7.1.3.	Forma diferencial de la ley de inducción de FARADAY	115
7.2.	Corriente de desplazamiento de MAXWELL	116
7.2.1.	Ecuaciones de MAXWELL	117
7.2.2.	Potenciales retardados	117
7.3.	Revisión del concepto de energía magnética	119
8.	Ecuaciones de MAXWELL	123
8.1.	Balance energético instantáneo	124
8.1.1.	Teorema de POYNTING	124
8.2.	Condiciones de borde	125

8.3.	Campos en el espacio ilimitado	126
8.3.1.	Ecuaciones de segundo orden	126
8.3.2.	Ecuaciones de segundo orden de los potenciales	127
8.3.3.	Solución de la Ecuación de D' ALEMBERT	129
8.3.4.	Problemas	133
8.4.	Ecuaciones de MAXWELL en forma compleja	135
8.4.1.	Proceso monocromático	135
8.4.2.	Algunas propiedades de los fasores	137
8.4.3.	Ecuaciones de MAXWELL complejas	137
8.5.	Propiedades de los medios materiales en el dominio de la frecuencia .	138
8.5.1.	Problemas	139
8.6.	Balance energético complejo	141
8.6.1.	Problemas	142
8.7.	Mini-proyecto 1	142
9.	Ondas planas	143
9.1.	La onda plana homogénea	143
9.1.1.	¿Y qué del campo \mathbf{H} ?	145
9.1.2.	Onda plana en un medio homogéneo absorbente	145
9.1.3.	Onda plana arbitrariamente orientada	148
9.1.4.	Velocidad de grupo	149
9.2.	Incidencia perpendicular	151
9.2.1.	Incidencia perpendicular en el dominio de la frecuencia	151
9.2.2.	Caso $ \rho = 0$	154
9.2.3.	Caso $ \rho = 1$	154
9.2.4.	Caso $0 < \rho < 1$	155
9.2.5.	Incidencia perpendicular en el dominio del tiempo	156
9.2.6.	Resultados de simulación	159
9.3.	Leyes de SNELL	162
9.3.1.	1era ley de SNELL	163
9.3.2.	2da. ley de SNELL	164
9.3.3.	Estudios de casos	164
9.4.	Fórmulas de FRESNEL	166
9.4.1.	Introducción	166
9.4.2.	Polarización perpendicular	166
9.4.3.	Polarización paralela	170

9.4.4. Ángulo de BREWSTER	173
9.4.5. Reflexión total	174
9.5. Mini-proyectos	182
9.6. El código FDTD en MATLAB®	185
10.Principios de radiación	187
10.1. Expresión exacta de los campos	188
10.1.1. Expresión exacta del campo H	189
10.1.2. Expresión exacta del campo E	190
10.2. Estudio de los campos de radiación	191
10.2.1. Estructura de los campos de radiación	191
10.2.2. Vector de radiación	194
10.2.3. Condición de no radiación	196
10.3. Características básicas de las antenas	197
10.3.1. Zona lejana	197
10.3.2. Patrón de radiación	198
10.3.3. Apertura de haz y nivel de lóbulos secundarios	199
10.3.4. Polarización	200
10.3.5. Directividad	203
10.3.6. Impedancia de entrada de la antena	205
10.3.7. Ganancia de potencia de la antena	205
10.3.8. Eficiencia de la Antena	206
10.3.9. Área efectiva de la antena	206
10.3.10.Ecuación de FRIIS	207
10.4. Problemas	210
11. Ondas Guiadas	212
11.0.1. Planteamiento del problema ideal	214
11.1. Clasificación de las soluciones	218
11.1.1. Ondas TEM	218
11.1.2. Ondas TE o H	219
11.1.3. Ondas TM o E	221
11.1.4. Solución	222
11.1.5. Estimación de la solución del problema real	223
11.1.6. Atenuación	224
11.1.7. Cálculo de la atenuación α_C por pérdidas en el conductor	227

11.1.8. Cálculo de la atenuación α_D por pérdidas en el dieléctrico . . .	228
11.2. Resumen de fórmulas	229
11.3. Cable coaxial	229
11.3.1. Onda de voltaje	231
11.3.2. Onda de corriente	231
11.3.3. Impedancia característica	232
11.3.4. Atenuación del cable coaxial	232
11.4. Guía de onda rectangular	233
11.4.1. Condición de propagación	238
11.4.2. Frecuencia de corte	238
11.4.3. Modo dominante	238
11.5. Guía de onda circular	239
11.5.1. Ondas TE	242
11.5.2. Ondas TM	243
11.5.3. Modo dominante	246
11.6. Relación entre \mathbf{J}_s y \mathbf{J}	247

Capítulo 1

Análisis Vectorial

1.1. Sistemas de coordenadas

SEAN x , y y z una terna de variables que denotan distancia, cada una medida sobre uno de tres ejes mutuamente ortogonales, los cuales se interceptan en un origen \mathcal{O} (ver Fig. 1.1). Estas distancias rectangulares bien podrían expresarse en función de otras cantidades geométricas como, por ejemplo, ángulos acimutales, ángulos polares, distancias axiales, distancias radiales, etc.

Desígnense con u_1 , u_2 y u_3 los miembros de cualesquiera de las ternas de parámetros geométricos que decidieran usarse y denomínense variables coordenadas. En general se podrá escribir:

$$x = x(u_1, u_2, u_3) \quad (1.1a)$$

$$y = y(u_1, u_2, u_3) \quad (1.1b)$$

$$z = z(u_1, u_2, u_3) \quad (1.1c)$$

Y, también, las variables u_1 , u_2 y u_3 podrán ser resueltas de las Ecs. (1.1) en función de x , y y z :

$$u_1 = u_1(x, y, z) \quad (1.2a)$$

$$u_2 = u_2(x, y, z) \quad (1.2b)$$

$$u_3 = u_3(x, y, z) \quad (1.2c)$$

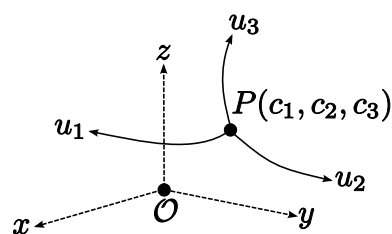


Figura 1.1: Versión gráfica de las curvas coordenadas x , y y z y u_1 , u_2 y u_3

La igualación de la Ecuaciones (1.2) a sendas constantes, i.e. $u_1 = c_1$, $u_2 = c_2$ y $u_3 = c_3$, da lugar a tres superficies, denominadas superficies coordenadas, cuya intersección define un punto en el espacio, y la tripleta de valores concretos (c_1, c_2, c_3) constituyen las coordenadas de dicho punto. Para nosotros tienen interés solo las familias de superficies $u_1 = c_1$, $u_2 = c_2$ y $u_3 = c_3$ mutuamente ortogonales en todos los puntos del espacio. La familia de variables coordenadas $\{u_1, u_2, u_3\}$, así definidas, forman el sistema de coordenadas curvilíneas ortogonales generalizadas.

Cada coordenada curvilínea generalizada, $u_{1,2,3}$, la cual, como se ha sugerido previamente, bien puede representar un ángulo, o bien una distancia, se ha de medir sobre una *curva coordenada* –ver Fig. 1.1–. La curva coordenada u_i , que pasa por el punto (c_1, c_2, c_3) , se obtiene de la intersección de las *superficies coordenadas* $u_j = c_j$ y $u_k = c_k$, con $i \neq j \neq k \in \{1, 2, 3\}$.

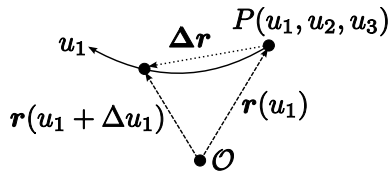


Figura 1.2: Detalle de la curva coordenada u_1

Sea $\mathbf{r}(u_1)$ el vector de posición del punto (c_1, c_2, c_3) . Al movernos sobre la curva u_1 , hasta experimentar un incremento Δu_1 –ver Fig. 1.2–, el vector de posición del punto de llegada será $\mathbf{r}(u_1 + \Delta u_1)$. El vector diferencia, a su vez, será: $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(u_1 + \Delta u_1) - \mathbf{r}(u_1)$. Al tomar el límite

$$\lim_{\Delta u_1 \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(u_1 + \Delta u_1) - \mathbf{r}(u_1)}{\Delta u_1} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1}$$

se obtiene un vector tangente a la curva coordenada u_1 , perpendicular a la superficie coordenada $u_1 = c_1$ y que apunta en la dirección de crecimiento de la variable coordenada u_1 . Un vector más apropiado, el cual conserva toda la información anterior, se obtiene normalizando $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1}$ respecto de su módulo

$$\mathbf{a}_1 = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1}}{\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} \right|}$$

siendo \mathbf{a}_1 , evidentemente, unitario. De manera similar se pueden obtener los vectores \mathbf{a}_2 y \mathbf{a}_3 :

$$\mathbf{a}_2 = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2}}{\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2} \right|} \quad \mathbf{a}_3 = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3}}{\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3} \right|}$$

Los vectores unitarios $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ constituyen una base vectorial. Se conviene en escribir: $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i} = h_i \mathbf{a}_i$, con $i \in 1, 2, 3$ y donde $h_i = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i} \right|$ se conoce como factor de escala. Fácilmente se comprueba que un desplazamiento diferencial du_i , con $i \in 1, 2, 3$, a lo largo de la curva coordenada u_i , comporta un desplazamiento de longitud par a

$\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i} \right| du_i$, y de aquí la denominación de factor de escala de $h_i = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i} \right|$. De esta manera, un desplazamiento espacial, ejecutado a partir de un incremento infinitesimal de las variables coordenadas, e.g. yendo de $P(u_1, u_2, u_3)$ a $P(u_1 + du_1, u_2 + du_2, u_3 + du_3)$, define un diferencial de camino o elemento de camino:

$$\begin{aligned} d\ell &= \sum_{i=1}^3 \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i} \right| du_i \mathbf{a}_i \\ &= h_1 du_1 \mathbf{a}_1 + h_2 du_2 \mathbf{a}_2 + h_3 du_3 \mathbf{a}_3 \end{aligned}$$

La unión de las seis superficies coordenadas que definen los puntos $P(u_1, u_2, u_3)$ y $P(u_1 + du_1, u_2 + du_2, u_3 + du_3)$ conforman, debido al carácter infinitesimal de los incrementos de las variables coordenadas, un cubo, el cual ocupa un diferencial de volumen, o elemento de volumen, $d\nu$, par a $d\nu = h_1 h_2 h_3 du_1 du_2 du_3$.

Cuadro 1.1: Elementos de interés de los sistemas de coordenadas curvilíneas generalizadas, Cartesianas, cilíndricas y esféricas.

	generalizadas	Cartesianas	cilíndricas	esféricas
<i>variables</i>	u_1, u_2, u_3	x, y, z	ρ, φ, z	r, θ, φ
<i>coordenadas</i>	$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$	$\mathbf{a}_x, \mathbf{a}_y, \mathbf{a}_z$	$\mathbf{a}_\rho, \mathbf{a}_\varphi, \mathbf{a}_z$	$\mathbf{a}_r, \mathbf{a}_\theta, \mathbf{a}_\varphi$
<i>base vectorial</i>	$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$	$\mathbf{a}_x, \mathbf{a}_y, \mathbf{a}_z$	$\mathbf{a}_\rho, \mathbf{a}_\varphi, \mathbf{a}_z$	$\mathbf{a}_r, \mathbf{a}_\theta, \mathbf{a}_\varphi$
<i>factores de</i>	h_1, h_2, h_3	1, 1, 1	1, ρ , 1	1, r , $r \sin \theta$
<i>escala</i>	h_1, h_2, h_3	1, 1, 1	1, ρ , 1	1, r , $r \sin \theta$
<i>elemento de</i>	$h_1 du_1 \mathbf{a}_1 +$	$dx \mathbf{a}_x +$	$d\rho \mathbf{a}_\rho +$	$dr \mathbf{a}_r +$
<i>longitud</i>	$h_2 du_2 \mathbf{a}_2 +$	$dy \mathbf{a}_y + dz \mathbf{a}_z$	$\rho d\varphi \mathbf{a}_\varphi + dz \mathbf{a}_z$	$r d\theta \mathbf{a}_\theta +$
	$h_3 du_3 \mathbf{a}_3$			$r \sin \theta d\varphi \mathbf{a}_\varphi$
<i>elementos de</i>	$h_1 h_2 du_1 du_2,$	$dx dy, dx dz,$	$\rho d\rho d\varphi,$	$r dr d\theta,$
<i>superficie</i>	$h_1 h_3 du_1 du_3,$	$dy dz$	$\rho d\varphi dz,$	$r \sin \theta dr d\varphi,$
	$h_2 h_3 du_2 du_3$		$d\rho dz$	$r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$
<i>elemento de</i>	$h_1 h_2 h_3 du_1 du_2 du_3$	$dx dy dz$	$\rho d\rho d\varphi dz$	$r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$
<i>volumen</i>				

Las caras de este cubo infinitesimal, a su vez, constituyen diferenciales de superficie, o elementos de superficie, que si se asumen de carácter vectorial tendrían una de las seis formas siguientes: $d\mathbf{s} \pm h_3 h_2 du_3 du_2 \mathbf{a}_1$, $d\mathbf{s} \pm h_1 h_3 du_1 du_3 \mathbf{a}_2$ o $d\mathbf{s} \pm h_1 h_2 du_1 du_2 \mathbf{a}_3$.

En este curso tendremos que ver, principalmente, con los sistemas de coordenadas Cartesianas, cilíndricas y esféricas. Una revisión apropiada de estos sistemas de

Cuadro 1.2: Transformación de coordenadas.

	a Cartesianas	desde Cartesianas
Cilíndricas	$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ $z = z$	$x = \rho \cos \varphi$ $y = \rho \sin \varphi$ $z = z$
Esféricas	$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ $\theta = \arctan\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\right)$ $\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$	$x = r \sin \theta \cos \varphi$ $y = r \sin \theta \sin \varphi$ $z = r \cos \theta$

coordenadas se puede realizar con base en los conceptos desarrollados previamente relativos al sistema de coordenadas curvilíneas ortogonales generalizadas. En efecto, al identificar los parámetros geométricos que sirven de base para la definición de la tripleta de superficies coordenadas correspondientes, mediante la particularización de la Ecs. (1.2), las definiciones de la base vectorial, los factores de escala, el elemento de longitud, los diferenciales de superficie y el diferencial de volumen, siguen de manera natural.

En el Cuadro 1.1 se muestran los elementos de interés de los sistemas de coordenadas curvilíneas generalizadas, Cartesianas, cilíndricas y esféricas, respectivamente.

1.1.1. Transformación de coordenadas

Dado un vector \mathbf{A} , expresado en un sistema de coordenadas determinado (sistema de coordenadas de origen –SCO–), su expresión en otro sistema de coordenadas (sistema de coordenadas de destino –SCD–) se puede hallar mediante una transformación que comprende dos procedimientos: la transformación de las variables coordenadas y la transformación de la base vectorial.

Transformación de las variables.

La transformación de las variables coordenadas se realiza a partir de las relaciones geométricas contenidas en las Ecs. (1.2) y (1.1), las cuales son, precisamente, ecuaciones de transformación de coordenadas. Estas relaciones, para el conjunto de coordenadas Cartesianas, cilíndricas y esféricas, se muestran en el Cuadro 1.2.

Cuadro 1.3: Proyecciones mutuas de las bases vectoriales de los sistemas de coordenadas Cartesianas y cilíndricas.

	En coordenadas cilíndricas			En coordenadas Cartesianas		
	\mathbf{a}_ρ	\mathbf{a}_φ	\mathbf{a}_z	\mathbf{a}_ρ	\mathbf{a}_φ	\mathbf{a}_z
\mathbf{a}_x	$\cos \varphi$	$-\sin \varphi$	0	$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$	$-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$	0
\mathbf{a}_y	$\sin \varphi$	$\cos \varphi$	0	$\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$	$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$	0
\mathbf{a}_z	0	0	1	0	0	1

Cuadro 1.4: Proyecciones mutuas de las bases vectoriales de los sistemas de coordenadas Cartesianas y esféricas.

	En coordenadas esféricas			En coordenadas Cartesianas		
	\mathbf{a}_r	\mathbf{a}_θ	\mathbf{a}_φ	\mathbf{a}_r	\mathbf{a}_θ	\mathbf{a}_φ
\mathbf{a}_x	$\sin \theta \cos \varphi$	$\cos \theta \cos \varphi$	$-\sin \varphi$	$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$	$\frac{xz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\sqrt{x^2+y^2}}$	$-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$
\mathbf{a}_y	$\sin \theta \sin \varphi$	$\cos \theta \sin \varphi$	$\cos \varphi$	$\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$	$\frac{yz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\sqrt{x^2+y^2}}$	$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$
\mathbf{a}_z	$\cos \theta$	$-\sin \theta$	0	$\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$	$-\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$	0

Transformación de la base vectorial

Para la transformación de la base vectorial es necesario hallar las proyecciones del vector dado en cada una de las direcciones de la base vectorial del SCD. En los cuadros 1.3 y 1.4 se resumen estas proyecciones.

La conversión del sistema de coordenadas en el que se expresa un vector dado se puede realizar mediante alguna de las siguientes operaciones expresadas matricialmente.

De cilíndricas a Cartesianas

$$\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & 0 \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_\rho(x, y, z) \\ A_\varphi(x, y, z) \\ A_z(x, y, z) \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

De Cartesianas a cilíndricas

$$\begin{pmatrix} A_\rho \\ A_\varphi \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x(\rho, \varphi, z) \\ A_y(\rho, \varphi, z) \\ A_z(\rho, \varphi, z) \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

De esféricas a Cartesianas

$$\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \frac{xz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\sqrt{x^2+y^2}} & -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \frac{yz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & -\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_r(x, y, z) \\ A_\theta(x, y, z) \\ A_\varphi(x, y, z) \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

De Cartesianas a esféricas

$$\begin{pmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \varphi & \cos \theta \sin \varphi & -\sin \theta \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x(r, \theta, \varphi) \\ A_y(r, \theta, \varphi) \\ A_z(r, \theta, \varphi) \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

1.2. Gradiente de un campo escalar

Dada una función escalar $f = f(u_1, u_2, u_3)$ de buen comportamiento (continua y derivable), la ecuación:

$$f(u_1, u_2, u_3) = V \quad (1.7)$$

define en el espacio una superficie como se muestra en la Fig. 1.3. Ubicados en un punto p sobre dicha superficie al realizar un desplazamiento diferencial –ver Fig. 1.3(a)–:

$$d\boldsymbol{\ell} = h_1 du_1 \mathbf{a}_1 + h_2 du_2 \mathbf{a}_2 + h_3 du_3 \mathbf{a}_3 \quad (1.8)$$

terminamos sobre una nueva superficie definida por:

$$f(u_1, u_2, u_3) = V + df \quad (1.9)$$

Se observa que al desplazarnos desde el punto p una distancia infinitesimal $d\boldsymbol{\ell}$, la función f experimenta un variación igualmente infinitesimal df , cuya expresión matemática viene dada por:

$$df = \frac{\partial f}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial f}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial f}{\partial u_3} du_3 \quad (1.10)$$

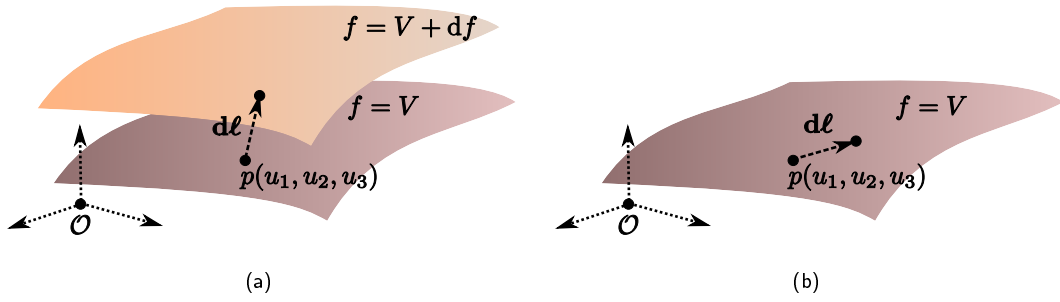


Figura 1.3: Superficies isoescalares del campo $f = f(u_1, u_2, u_3)$, utilizadas para la ilustración del concepto de gradiente. a) Al desplazarnos un diferencial de camino fuera de la superficie $f = V$ terminamos sobre una nueva superficie isoescalar $f = V + df$, en la cual la función escalar experimenta un incremento diferencial $df = \frac{\partial f}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial f}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial f}{\partial u_3} du_3$. b) Al desplazarnos un diferencial de camino dentro de la misma superficie $f = V$ la función escalar experimenta un incremento diferencial nulo $df = 0$.

Fácilmente se comprueba que la variación df se puede factorizar de la forma:

$$df = \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial u_1} \mathbf{a}_1 + \frac{\partial}{\partial u_2} \mathbf{a}_2 + \frac{\partial}{\partial u_3} \mathbf{a}_3 \right)}_{\nabla f} f \cdot \underbrace{h_1 du_1 \mathbf{a}_1 + h_2 du_2 \mathbf{a}_2 + h_3 du_3 \mathbf{a}_3}_{d\ell} \quad (1.11)$$

El campo vectorial:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial}{\partial u_1} \mathbf{a}_1 + \frac{\partial}{\partial u_2} \mathbf{a}_2 + \frac{\partial}{\partial u_3} \mathbf{a}_3 \right) f \quad (1.12)$$

se denomina gradiente de la función escalar f .

Veamos que sentido físico tiene. Al poner:

$$df = \nabla f \cdot d\ell = |\nabla f| \cdot |d\ell| \cos \alpha \quad (1.13)$$

Reconocemos, en primer lugar, que df se maximiza para $\alpha = 0$, por lo que:

$$|\nabla f| = \frac{df_{MAX}}{|d\ell|} \quad (1.14)$$

y comprobamos que el **módulo del gradiente** de una función escalar es igual a la máxima razón de cambio espacial de dicha función en el punto donde se evalúa dicho gradiente.

Si ahora imponemos que el desplazamiento espacial $d\ell$ nos conduzca a un punto en la misma superficie $f = V$ –ver Fig. 1.3(b)–, será: $df = 0$. Ya que $\nabla f \neq 0$ y $d\ell \neq 0$, sigue que $\cos \alpha = 0$, y por tanto $\alpha = 90^\circ$. Se puede deducir entonces que la **dirección del gradiente** coincide con la del vector unitario \mathbf{a}_n normal a la

Cuadro 1.5: El gradiente ∇f expresado en diferentes sistemas de coordenadas.

Sist. de coordenadas	∇f
<i>Cartesianas</i>	$\frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{a}_z$
<i>Cilíndricas</i>	$\frac{\partial f}{\partial \rho} \mathbf{a}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \mathbf{a}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{a}_z$
<i>Esféricas</i>	$\frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{a}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \mathbf{a}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \mathbf{a}_\varphi$

superficie $f = V$ y apunta hacia la dirección en la que la razón de cambio de f por unidad de longitud es máxima.

La expresión

$$\nabla \equiv \left(\frac{\partial}{h_1 \partial u_1} \mathbf{a}_1 + \frac{\partial}{h_2 \partial u_2} \mathbf{a}_2 + \frac{\partial}{h_3 \partial u_3} \mathbf{a}_3 \right) \quad (1.15)$$

es un operador diferencial vectorial (nabla) que nos permite definir en modo operativo el gradiente de un campo escalar para cualquier sistema de coordenadas.

1.3. Estructura espacial del campo y su relación con las fuentes que lo producen

Los campos físicos son producidos, en general, o por fuentes de naturaleza escalar, o por fuentes de naturaleza vectorial:

1. Los campos que son producidos por fuentes escalares convergen hacia, o emergen desde, éstas, según la «polaridad» de las fuentes, por lo que sus líneas de fuerza son abiertas: nacen en fuentes escalares positivas y terminan en fuentes escalares negativas. Claro está que cuando se tienen fuentes de una sola polaridad, el inicio de las líneas de fuerza, o el final, se deberá ubicar en el infinito. El carácter divergente (o *convergente*, como diría el propio MAXWELL) de estos campos se evidencia analíticamente al presentar una derivada longitudinal no nula, e.g. el campo $\mathbf{F}_i = x \mathbf{a}_x$ es un campo divergente. Estos campos se denominan *campos irrotacionales*, porque no rotan.
2. Por otro lado, los campos que son producidos por fuentes vectoriales rotan, o circulan, transversalmente alrededor de las fuentes, por lo que sus líneas de

fuerza son cerradas: no tienen ni principio ni fin. El carácter circulante de estos campos se evidencia analíticamente al presentar al menos una derivada transversal no nula, e.g. el campo $\mathbf{F}_s = y\mathbf{a}_x$ es un campo circulante. Estos campos se denominan *campos solenoidales*, porque rotan.

Ya que existe una estrecha relación entre la naturaleza de las fuentes y la estructura de los campos, tiene sentido estudiar formalmente la relación espacial entre fuentes y campos, asunto que abordaremos de seguido mediante la definición de la divergencia y el rotacional de un campo vectorial. Más adelante, concluiremos nuestro repaso enunciando el teorema de HELMHOLTZ, completando los principios formales que servirán de base para el estudio de los campos eléctrico, magnético y electromagnético.

1.4. Divergencia de un campo vectorial

La densidad de fuentes escalares de un campo vectorial se denomina divergencia del campo. Como la cantidad de fuentes escalares de un campo contenidas en un volumen genérico se mide mediante una integral de flujo, el flujo y la divergencia están estrechamente relacionados, siendo la primera una cantidad global y la segunda una cantidad puntual. De seguido se desarrollan más amplia y formalmente estos conceptos.

1.4.1. Integral de flujo

Se conviene en admitir que el flujo de un campo a través de una superficie cerrada mide la cantidad de fuentes escalares de este campo contenidas en el interior de tal superficie.

Dado un campo vectorial $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r})$, se define:

$$\Phi_{S(\Delta V)}^{\mathbf{A}} = \oint_{S(\Delta V)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} \equiv \text{fuentes escalares de } \mathbf{A} \text{ contenidas en } \Delta V$$

donde la integral $\Phi_S^{\mathbf{A}} = \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}$ se lee como el **flujo** del campo \mathbf{A} a través de S .

Si $\Phi_{S(\Delta V)}^{\mathbf{A}} > 0$, entendemos que las líneas de fuerza de \mathbf{A} atraviesan la superficie S en promedio desde el interior hacia el exterior de ΔV , como *divergiendo* desde el interior de ΔV , y decimos que en el volumen ΔV se localizan fuentes escalares positivas o manantiales del campo \mathbf{A} . Si $\Phi_{S(\Delta V)}^{\mathbf{A}} < 0$, las líneas de fuerza de \mathbf{A} atraviesan en promedio la superficie S desde el exterior hacia el interior de ΔV ,

como *convergiendo* hacia el interior de ΔV , y decimos que en el volumen ΔV se localizan fuentes escalares negativas o sumideros del campo \mathbf{A} . Y si $\Phi_{S(\Delta V)}^{\mathbf{A}} = 0$ interpretaremos que las líneas de fuerza de \mathbf{A} atraviesan la superficie S en ambos sentidos en igual proporción (las líneas que salen de ΔV igualan a las que entran), y decimos que no se localizan fuentes escalares de \mathbf{A} en el interior de ΔV .

Ejemplo Se desea calcular el flujo del campo $\mathbf{F}_i = \frac{a\rho}{\rho}$ a través de las superficies S_1 y S_2 que se muestran en la Fig. 1.4.

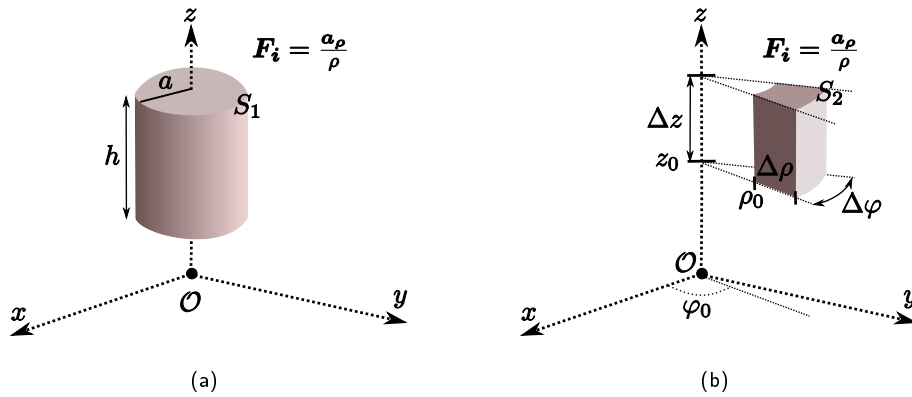


Figura 1.4: Superficies para el cálculo del flujo del campo $\mathbf{F}_i = \frac{a\rho}{\rho}$.

Solución Fácilmente se comprueba que $\oint_{S_1} \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{s} = 2\pi h$ y $\oint_{S_2} \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{s} = 0$, lo cual quiere decir que la superficie S_1 contiene en su interior $2\pi h$ fuentes escalares del campo \mathbf{F}_i , mientras que en el interior de S_2 no se localizan fuentes escalares de dicho campo.

1.4.2. Definición de la divergencia de un campo vectorial

Definimos ahora la **divergencia** del campo vectorial \mathbf{A} en un punto dado, la cual se escribe abreviadamente $\nabla \cdot \mathbf{A}$, como la densidad de fuentes escalares de \mathbf{A} por unidad de volumen en dicho punto:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\text{fuentes escalares de } \mathbf{A}}{\Delta V}$$

O equivalentemente:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} \quad (1.16)$$

donde la superficie S de integración es la superficie que encierra el volumen ΔV en cuyo interior se encuentra el punto donde se desea calcular la divergencia de \mathbf{A} .

La ecuación (1.16) se lee: la divergencia de un campo vectorial \mathbf{A} en un punto dado se obtiene tomando un pequeño volumen que contenga el punto, calculando el flujo de \mathbf{A} a través de la superficie que encierra dicho volumen⁽¹⁾, y dividiendo el flujo entre el volumen en la medida que este se reduce a dimensiones infinitesimales. La cantidad que se obtiene (la divergencia) es escalar y tiene dimensiones de una densidad volumétrica de flujo o de fuentes escalares.

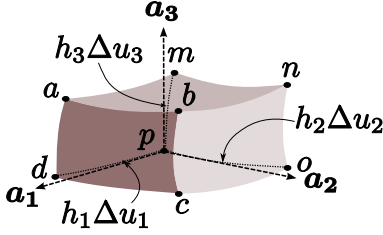


Figura 1.5: Volumen incremental que contiene el punto P donde se desea calcular $\nabla \cdot \mathbf{A}$.

Para calcular la divergencia de \mathbf{A} en un punto genérico P , de coordenadas u_1, u_2 y u_3 , se toma un pequeño volumen cúbico incremental ΔV de aristas $h_1\Delta u_1, h_2\Delta u_2$ y $h_3\Delta u_3$, con uno de sus vértices apoyado sobre P –ver Fig. 1.5–, y se calcula el flujo de A a través de las seis caras del cubo [1]. Tomaremos dos de estas caras, tales que estas sean opuestas, e.g. las caras $abcd$ y $mnop$, y evaluaremos los respectivos flujos, y luego, por analogía, escribiremos los flujos a través de las

caras restantes. Asumiendo que los incrementos Δu_2 y Δu_3 son suficientemente pequeños, de tal suerte que A_1, h_2 y h_3 , cuyos valores se toman en p , se pueden asumir uniformes en toda la cara $mnop$ se podrá escribir:

$$\begin{aligned} \int_{mnop} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} &\approx \mathbf{A}(\text{en } p) \cdot (-\mathbf{a}_1)(\text{área de la cara } mnop) \\ &\approx -A_1 h_2 h_3 \Delta u_2 \Delta u_3 \end{aligned} \quad (1.17)$$

El flujo de \mathbf{A} a través de la cara $abcd$, asumiendo que \mathbf{A} sea continuo y posea derivadas de cualquier orden en el interior de ΔV y sobre $S(\Delta V)$, se puede aproximar a partir del valor de su flujo a través de la cara $mnop$ mediante la expansión en serie de TAYLOR $\int_{abcd} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \int_{mnop} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} + \frac{\partial}{\partial u_1}(\int_{mnop} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s})\Delta u_1 + \text{T.O.S.}$, donde los términos de orden superior, que contienen potencias del incremento Δu_1 (Δu_1^n), con $n \geq 2$, se pueden despreciar en virtud del proceso de límite. De esta forma:

$$\begin{aligned} \int_{abcd} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} &\approx A_1 h_2 h_3 \Delta u_2 \Delta u_3 + \frac{\partial}{\partial u_1}(A_1 h_2 h_3 \Delta u_2 \Delta u_3)\Delta u_1 \\ &\approx A_1 h_2 h_3 \Delta u_2 \Delta u_3 + \frac{\partial}{\partial u_1}(A_1 h_2 h_3)\Delta u_1 \Delta u_2 \Delta u_3 \end{aligned} \quad (1.18)$$

Estos flujos parciales hacen una contribución al flujo total par a

$$\int_{mnop} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} + \int_{abcd} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} \approx \frac{\partial}{\partial u_1}(A_1 h_2 h_3)\Delta u_1 \Delta u_2 \Delta u_3$$

¹Tomando la normal en cada punto de la superficie que apunta hacia el exterior del volumen considerado

Calculando los flujos parciales a través de las caras restantes de manera análoga y sumándolos todos, se obtiene el flujo total. Al dividir éste entre el volumen incremental $\Delta V = h_1 h_2 h_3 \Delta u_1 \Delta u_2 \Delta u_3$, y ejecutar el límite para ΔV que tiende a cero se obtiene:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{h_1, h_2, h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} (A_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial u_2} (A_2 h_1 h_3) + \frac{\partial}{\partial u_3} (A_3 h_2 h_1) \right] \quad (1.19)$$

Al especializar la ecuación (1.19) para cada sistema de coordenadas se obtienen las expresiones que se presentan en el cuadro 1.6.

Cuadro 1.6: La divergencia $\nabla \cdot \mathbf{A}$ expresada en diferentes sistemas de coordenadas.

Sistema de coordenadas	$\nabla \cdot \mathbf{A}$
<i>Cartesianas</i>	$\frac{\partial}{\partial x} A_x + \frac{\partial}{\partial y} A_y + \frac{\partial}{\partial z} A_z$
<i>Cilíndricas</i>	$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} A_\varphi + \frac{\partial}{\partial z} A_z$
<i>Esféricas</i>	$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} (A_\varphi)$

1.4.3. Teorema de la divergencia

Dado el campo \mathbf{A} y la superficie cerrada S , la cual define un volumen V —ver figura 1.6(a)—, siendo el campo \mathbf{A} de buen comportamiento tanto en S como en V , se puede demostrar que:

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A} \, d\nu = \oint_{S(V)} \mathbf{A} \cdot \mathbf{ds} \quad (1.20)$$

Para ello dividimos el volumen V en N volúmenes incrementales $\Delta\nu_i$ —ver figura 1.6(a)—.

En el punto central del volumen $\Delta\nu_i$ tenemos:

$$\nabla \cdot \mathbf{A}|_i = \lim_{\Delta\nu_i \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta\nu_i} \oint_{S_i(\Delta\nu_i)} \mathbf{A} \cdot \mathbf{ds} \quad (1.21)$$

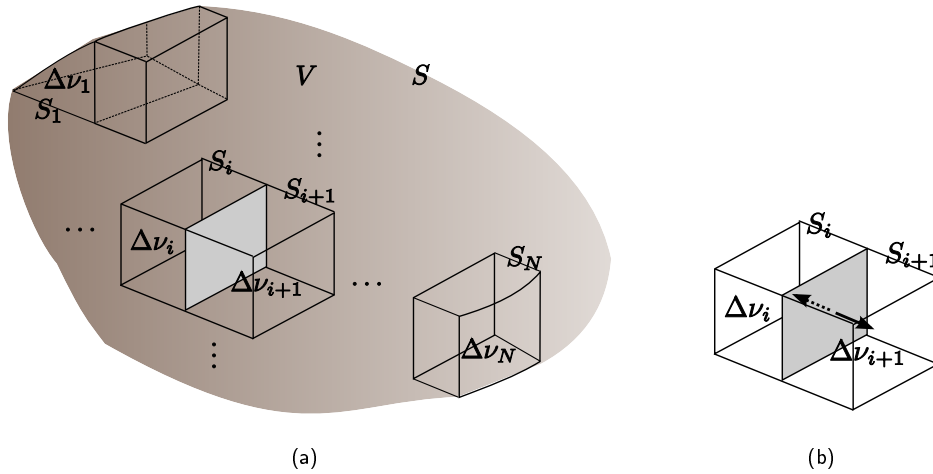


Figura 1.6: (a) Superficie cerrada para la ilustración del Teorema de La Divergencia y (b) detalle de dos volúmenes incrementales contiguos.

Si los volúmenes incrementales se toman lo suficientemente pequeños como para considerar la divergencia del campo \mathbf{A} aproximadamente constante en todo $\Delta\nu_i$, se podrá escribir:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{A}|_i &\approx \frac{1}{\Delta\nu_i} \oint_{S_i} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} \\ \nabla \cdot \mathbf{A}|_i \Delta\nu_i &\approx \oint_{S_i} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}\end{aligned}\quad (1.22)$$

aproximación que mejora en la medida que $\Delta\nu_i$ tiende a cero, en cuyo caso N tendería a infinito. Si los N términos de los tipos $\nabla \cdot \mathbf{A}|_i \Delta\nu_i$ y $\oint_{S_i} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}$ que pueden ser definidos en el interior de S se suman respectivamente, se obtiene:

$$\sum_{i=1}^N \nabla \cdot \mathbf{A}|_i \Delta\nu_i \approx \sum_{i=1}^N \oint_{S_i} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} \quad (1.23)$$

Al tomar el limite para $\Delta\nu_i \rightarrow 0$ ($N \rightarrow \infty$), la aproximación desaparece dando lugar a una igualdad:

$$\lim_{\substack{\Delta\nu_i \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^N \nabla \cdot \mathbf{A}|_i \Delta\nu_i = \lim_{\Delta\nu_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N \oint_{S_i} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} \quad (1.24)$$

En particular, para el término de la izquierda, tendremos:

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{\Delta\nu_i \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^N &= \int_V \\ \lim_{\substack{\Delta\nu_i \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \Delta\nu_i &= d\nu\end{aligned}$$

y

$$\lim_{\Delta\nu_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N \nabla \cdot \mathbf{A}|_i \Delta\nu_i = \int_V \nabla \cdot \mathbf{A} d\nu \quad (1.25)$$

Para resolver el límite del miembro de la derecha de la ecuación (1.24), nos basaremos en el hecho de que en el cómputo de flujo de \mathbf{A} a través de dos superficies que encierran dos volúmenes incrementales contiguos, dígame $\Delta\nu_i$ y $\Delta\nu_{i+1}$ —ver figura 1.6(b)—, las aportaciones de flujo correspondientes a la cara común de ambas superficies contiguas, calculadas en un sentido en un caso y en sentido opuesto en el otro, se anulan mutuamente. Por esta razón, la suma de los N flujos del tipo $\oint_{S_i} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}$ convergirá, para $N \rightarrow \infty$, a la suma de los flujos de \mathbf{A} a través de las caras no compartidas de las S_i , la cual coincide con el flujo de \mathbf{A} a través de la superficie exterior S . Esto es:

$$\lim_{\substack{\Delta\nu_i \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^N \oint_{S_i} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \oint_{S(V)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} \quad (1.26)$$

Juntando los los resultados (1.25) y (1.26), obtenemos el denominado Teorema de la Divergencia:

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A} d\nu = \oint_{S(V)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} \quad (1.27)$$

Comprobación del Teorema de la Divergencia en volúmenes que contienen puntos singulares del campo

Al intentar comprobar, por ejemplo, el Teorema de la Divergencia para el campo $\mathbf{A} = \mathbf{a}_r/r^2$, en un volumen esférico centrado en el origen, fácilmente podemos incurrir en el error de escribir:

$$\begin{aligned} \int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} &= 4\pi \\ \int_{V(S)} \nabla \cdot \mathbf{A} d\nu &= 0 \end{aligned}$$

y concluir que

$$\int_{V(S)} \nabla \cdot \mathbf{A} d\nu \neq \int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}$$

ya que la aplicación (errónea) de la Ec. (1.19) especializada para el caso de coordenadas esféricas —ver Cuadro 1.6— arroja: $\nabla \cdot \mathbf{a}_r/r^2 = 0$.

El error está en que este resultado solo es válido para todos los puntos fuera del origen, donde el campo presenta una singularidad y la propia fórmula no tiene validez. En general, si en el volumen V dado para la comprobación del Teorema de la Divergencia se encuentran puntos singulares del campo —como \mathbf{r}_s en la Fig. 1.7—, en tales puntos se deberá proceder a estimar la Divergencia utilizando su definición dada mediante la Ec. (1.16). El cómputo de la Divergencia en los puntos restantes, en cambio, se podrá realizar utilizando directamente la fórmula dada en la Ec. (1.19).

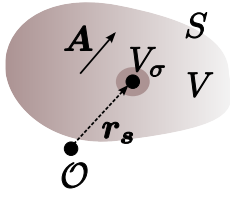


Figura 1.7: Volumen V con un punto de singularidad del campo \mathbf{A} .

Para ello se debe proceder a «aislar» la singularidad, lo cual consiste en tomar un pequeño volumen V_σ , con centro en el punto singular, y dividir la integral $\int_V \nabla \cdot \mathbf{A} \, d\nu$ en dos partes:

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A} \, d\nu = \int_{V-V_\sigma} \nabla \cdot \mathbf{A} \, d\nu + \int_{V_\sigma} \nabla \cdot \mathbf{A} \, d\nu$$

donde la Divergencia del campo en la integral de volumen sobre $V(s) - V_\sigma$ se puede calcular mediante la fórmula de la Ec. (1.19), mientras que la integral de volumen sobre V_σ se ha de calcular mediante la definición –Ec. (1.16)–:

$$\begin{aligned} \int_{V-V_\sigma} \nabla \cdot \mathbf{A} \, d\nu &= \int_{V-V_\sigma} \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial(A_1 h_2 h_3)}{\partial u_1} + \frac{\partial(A_2 h_1 h_3)}{\partial u_2} + \frac{\partial(A_3 h_1 h_2)}{\partial u_3} \right] d\nu \\ \int_{V_\sigma} \nabla \cdot \mathbf{A} \, d\nu &= \int_{V_\sigma} \left(\lim_{V_\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{V_\sigma} \oint_{S_\sigma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} \right) d\nu \end{aligned}$$

y si se conviene que la divergencia del campo \mathbf{A} ha de converger en V_σ , se la puede factorizar de la integral de volumen, resultando:

$$\begin{aligned} \int_{V_\sigma} \left(\lim_{V_\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{V_\sigma} \oint_{S_\sigma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} \right) d\nu &= \lim_{V_\sigma \rightarrow 0} \left(\frac{1}{V_\sigma} \oint_{S_\sigma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} \right) \int_{V_\sigma} d\nu \\ &= \oint_{\lim_{V_\sigma \rightarrow 0} S_\sigma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} \end{aligned} \quad (1.28)$$

Según la Ec. (1.28), para comprobar el Teorema de la Divergencia en un volumen en cuyo interior se localiza un punto singular del campo, una porción infinitamente pequeña de la integral de volumen es reconvertida en una integral de flujo. Dicha porción de volumen debe contener en su interior el punto de singularidad del campo.

Utilización el Teorema de la Divergencia para la estimación de la Divergencia en puntos singulares del campo

Si en el interior de cierto volumen V , encerrado por una superficie S , se encuentra un punto singular \mathbf{r}_s de cierto campo \mathbf{A} , como se ilustra en la Fig. 1.7, y se comprueba que $\int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} \neq 0$ y que fuera del mencionado punto la Divergencia del campo es nula, entonces en el punto de singularidad estarán *apiñadas* todas las fuentes del campo atrapadas por S y la Divergencia del campo valdrá:

$$\nabla \cdot \mathbf{A}|_{r'_s} = \left(\int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} \right) \delta(r - r_s)$$

Ejemplo Dado el campo

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{a}_r}{r^2}$$

calcule la divergencia de \mathbf{A} usando el teorema de la Divergencia y tomando en cuenta la definición del delta de DIRAC:

$$\delta(x) \begin{cases} \neq 0, & \text{para } x = 0; \\ = 0, & \text{para } x \neq 0. \end{cases}$$

y además:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \, dx = 1$$

Solución Para $r \neq 0$ se puede aplicar la Fórmula (1.19) y se obtiene que $\nabla \cdot (\mathbf{a}_r/r^2) = 0$, lo cual implica que no existen fuentes escalares del campo fuera del origen. Para $r = 0$ la divergencia del campo, en cambio, ya no se puede calcular mediante la misma fórmula. Tomando, sin embargo, una superficie cerrada cualquiera que contenga en su interior el punto singular del campo (el origen), fácilmente se comprueba que $\int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = 4\pi$. Como ha quedado descartada la existencia de fuentes escalares del campo fuera del origen, las fuentes que producen el campo están todas acumuladas en el origen, y su densidad volumétrica allí debe ser, en virtud del Teorema de la Divergencia y de la definición de la distribución delta de Dirac, de la forma: $\nabla \cdot (\mathbf{a}_r/r^2) = 4\pi\delta(x)\delta(y)\delta(z)$.

1.5. Rotacional de un campo vectorial

La densidad de fuentes vectoriales por unidad de superficie transversal de un campo vectorial se denomina rotacional del campo. Como la cantidad de fuentes vectoriales de un campo que atraviesan cierta superficie abierta se mide mediante una integral de circulación, la circulación y el rotacional están estrechamente relacionados, siendo la primera una cantidad global y la segunda una cantidad puntual. De seguido se desarrollan más amplia y formalmente estos conceptos.

1.5.1. Integral de circulación

Se conviene en admitir que la circulación de un campo a través de un camino cerrado mide la cantidad de fuentes vectoriales de este campo, en la dirección transversal del camino, enlazadas por el contorno.

Dado un campo vectorial $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r})$, se define:

$$C_{\Gamma(\Delta S)}^{\mathbf{A}} = \oint_{\Gamma(\Delta S)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \equiv \text{fuentes vectoriales de } \mathbf{A} \text{ enlazadas por } \Gamma$$

donde la integral $C_{\Gamma}^{\mathbf{A}} = \oint_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$ se lee como la **circulación** del campo \mathbf{A} a lo largo de Γ .

Establecido un sentido de recorrido para la curva cerrada Γ , si $C_{\Gamma(\Delta S)}^{\mathbf{A}} > 0$, entendemos que las líneas de fuerza de \mathbf{A} se proyectan en promedio positivamente sobre la tangente de la curva Γ , como **circulando** en el mismo sentido de recorrido prefijado de la curva Γ , y decimos que Γ enlaza fuentes vectoriales del campo \mathbf{A} , cuya orientación en el espacio forma un sistema derecho con el sentido de recorrido de la curva Γ . Si $C_{\Gamma(\Delta S)}^{\mathbf{A}} < 0$, las líneas de fuerza de \mathbf{A} se proyectan en promedio negativamente sobre la tangente de la curva Γ , como **circulando** en sentido contrario al sentido de recorrido prefijado de la curva Γ , y decimos que Γ enlaza fuentes vectoriales del campo \mathbf{A} , cuya orientación en el espacio forma un sistema izquierdo con el sentido de recorrido de la curva Γ . Y si $C_{\Gamma(\Delta S)}^{\mathbf{A}} = 0$ interpretaremos que las líneas de fuerza de \mathbf{A} no «circulan» a lo largo de Γ , y decimos que Γ no enlaza ninguna fuente vectorial de \mathbf{A} .

Ejemplo Se desea calcular la circulación del campo $\mathbf{F}_s = \frac{a\varphi}{\rho}$ a través de los caminos Γ_1 y Γ_2 que se muestran en la Fig. 1.8.

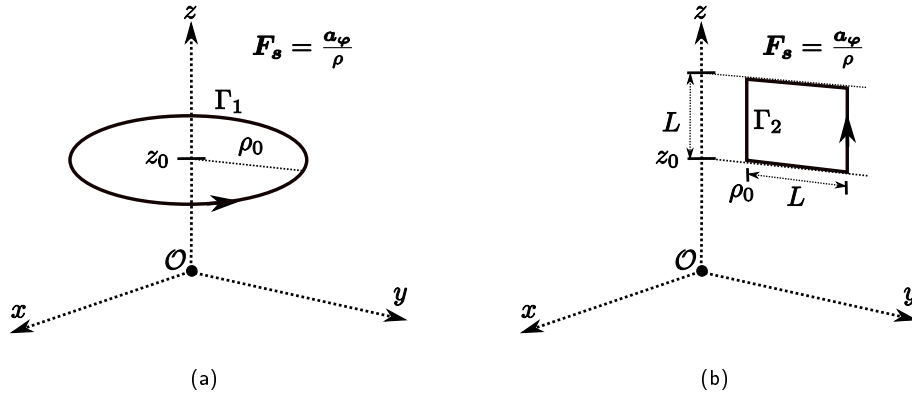


Figura 1.8: Caminos cerrados con sus sentidos de recorrido para el cálculo de la circulación del campo $\mathbf{F}_s = \frac{a\varphi}{\rho}$.

Solución Fácilmente se comprueba que $\oint_{\Gamma_1} \mathbf{F}_s \cdot d\mathbf{l} = 2\pi$ y $\oint_{\Gamma_2} \mathbf{F}_s \cdot d\mathbf{l} = 0$, lo cual quiere decir que el camino cerrado Γ_1 enlaza 2π fuentes vectoriales en la dirección de \mathbf{a}_z del campo \mathbf{F}_s , mientras que el camino Γ_2 no enlaza fuentes vectoriales de dicho campo en la dirección de \mathbf{a}_x .

1.5.2. Definición de rotacional

Definimos ahora la componente n -ésima del **rotacional** del campo vectorial \mathbf{A} en un punto dado, en cierta dirección \mathbf{a}_n arbitraria, la cual se escribe abreviadamente $(\nabla \times \mathbf{A})_n$, como la densidad de fuentes vectoriales de \mathbf{A} en la dirección \mathbf{a}_n por unidad de superficie transversal en dicho punto:

$$(\nabla \times \mathbf{A})_n = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{(\text{fuentes vectoriales de } \mathbf{A})_n}{\Delta S}$$

O en modo equivalente:

$$(\nabla \times \mathbf{A})_n = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S} \oint_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell} \quad (1.29)$$

donde el camino Γ de integración es el contorno de la superficie ΔS donde se encuentra el punto donde se desea calcular el rotacional de \mathbf{A} y cuya normal coincide con la dirección de la componente del rotacional. La ecuación (1.29) se lee: la componente del rotacional de un campo vectorial \mathbf{A} en un punto dado en una dirección arbitraria \mathbf{a}_n se obtiene tomando una pequeña superficie que contenga el punto y ortogonal a dicha dirección, calculando la integral de línea de \mathbf{A} a lo largo del contorno de dicha superficie (la circulación) ⁽²⁾, y dividiendo esta circulación entre la superficie en la medida que ésta se hace disminuir hasta dimensiones infinitesimales. La cantidad que se obtiene (la componente del rotacional en la dirección normal a la superficie) tiene dimensiones de una densidad superficial de circulación o de fuentes vectoriales.

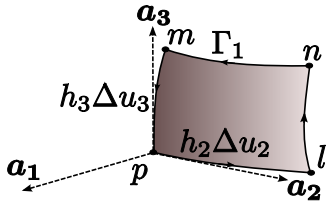


Figura 1.9: Superficie diferencial que contiene el punto donde se desea calcular el $(\nabla \times \mathbf{A})_1 = \nabla \times \mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_1$.

Para obtener el rotacional de \mathbf{A} se deben calcular las componentes de éste según las tres direcciones bases de un sistema de coordenadas dado. En coordenadas curvilíneas generalizadas será:

$$\nabla \times \mathbf{A} = (\nabla \times \mathbf{A})_1 \mathbf{a}_1 + (\nabla \times \mathbf{A})_2 \mathbf{a}_2 + (\nabla \times \mathbf{A})_3 \mathbf{a}_3 \quad (1.30)$$

Para calcular la componente $(\nabla \times \mathbf{A})_1$ del rotacional en un punto genérico $p(u_1, u_2, u_3)$ se toma una superficie incremental ΔS_1 con centro en el punto p , o con p como uno de sus vértices –ver Fig. 7.3(b)–, y se calcula la circulación $C_{\Gamma_1}^{\mathbf{A}}$ del campo a lo largo del contorno Γ_1 de dicha superficie.

²La dirección de circulación debe cumplir la regla de la mano derecho respecto a la normal a la superficie en la dirección en la que se desea calcular la componente del rotacional

Con relación a la Figura 7.3(b) se tiene:

$$(\nabla \times \mathbf{A})_1 \approx \frac{1}{h_2 h_3 \Delta u_2 \Delta u_3} \left(\int_{pl} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell} + \int_{ln} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell} + \int_{nm} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell} + \int_{mp} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell} \right) \quad (1.31)$$

donde

$$\begin{aligned} \int_{pl} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell} &\approx \mathbf{A}(\text{en } p) \cdot \mathbf{a}_2 (\text{longitud del tramo } pl) \\ &\approx A_2 (h_2 \Delta u_2) \end{aligned} \quad (1.32)$$

El cálculo de $\int_{mn} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell}$ se puede calcular a partir del resultado dado por la Ec. (1.32), asumiendo que el campo \mathbf{A} sea de buen comportamiento (continuo y derivable), tanto en ΔS como en Γ , mediante el desarrollo en serie de TAYLOR $\int_{mn} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \int_{pl} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell} + \frac{\partial}{\partial u_3} (\int_{pl} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell}) \Delta u_3 + \text{T.O.S.}$, donde los términos de orden superior contienen potencias del incremento Δu_3 (Δu_3^n), con $n \geq 2$, los cuales se pueden despreciar en virtud del proceso de límite. De esta forma:

$$\int_{mn} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell} \approx A_2 h_2 \Delta u_2 + \frac{\partial}{\partial u_3} (A_2 h_2 \Delta u_2) \Delta u_3$$

y

$$\int_{nm} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell} \approx -A_2 h_2 \Delta u_2 - \frac{\partial}{\partial u_3} (A_2 h_2) \Delta u_2 \Delta u_3 \quad (1.33)$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned} \int_{mp} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell} &\approx \mathbf{A}(\text{en } p) \cdot (-\mathbf{a}_3) (\text{longitud del tramo } np) \\ &\approx -A_3 h_3 \Delta u_3 \end{aligned} \quad (1.34)$$

Finalmente, para el cálculo de $\int_{nl} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell}$ se puede proceder de manera similar a como se procedió con $\int_{mn} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell}$:

$$\int_{nl} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell} \approx -A_3 h_3 \Delta u_3 - \frac{\partial}{\partial u_2} (A_3 h_3 \Delta u_3) \Delta u_2$$

y

$$\int_{ln} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell} \approx A_3 h_3 \Delta u_3 + \frac{\partial}{\partial u_2} (A_3 h_3) \Delta u_3 \Delta u_2 \quad (1.35)$$

Al sustituir las Ecs. (1.32), (1.33), (1.34) y (1.35) en la Ec. (1.31), efectuar la suma y resolver el límite, se obtiene:

$$(\nabla \times \mathbf{A})_1 = \frac{1}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_2} (A_3 h_3) - \frac{\partial}{\partial u_3} (A_2 h_2) \right]$$

Las componentes restantes de $\nabla \times \mathbf{A}$ se pueden calcular de manera similar hasta obtener:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} &= \frac{\mathbf{a}_1}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_2} (A_3 h_3) - \frac{\partial}{\partial u_3} (A_2 h_2) \right] + \frac{\mathbf{a}_2}{h_1 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_3} (A_1 h_1) - \frac{\partial}{\partial u_1} (A_3 h_3) \right] \\ &+ \frac{\mathbf{a}_3}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} (A_2 h_2) - \frac{\partial}{\partial u_2} (A_1 h_1) \right] \end{aligned} \quad (1.36)$$

La Ecuación (1.36) se puede escribir de forma concisa mediante el determinante:

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \mathbf{a}_1 & h_2 \mathbf{a}_2 & h_3 \mathbf{a}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix} \quad (1.37)$$

Al especializar la ecuación (1.37) para cada sistema de coordenadas se obtienen las expresiones que se presentan en el cuadro 1.7.

Cuadro 1.7: Rotacional $\nabla \times \mathbf{A}$ expresado en diferentes sistemas de coordenadas

	<i>Cartesianas</i>	<i>Cilíndricas</i>	<i>Esféricas</i>
$\nabla \times \mathbf{A}$	$\begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$	$\frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \mathbf{a}_\rho & \rho \mathbf{a}_\varphi & \mathbf{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & \rho A_\varphi & A_z \end{vmatrix}$	$\frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \mathbf{a}_r & r \mathbf{a}_\theta & r \sin \theta \mathbf{a}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ A_r & r A_\theta & r \sin \theta A_\varphi \end{vmatrix}$

1.5.3. Teorema de STOKES

Dado el campo \mathbf{A} y la superficie abierta S de perímetro Γ —ver figura 1.10(a)—, siendo \mathbf{A} de buen comportamiento tanto en S como en Γ , se puede demostrar que:

$$\int_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \oint_\Gamma \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell} \quad (1.38)$$

Para ello dividimos la superficie S en N superficies incrementales ΔS_n . Para el punto central de la superficie incremental ΔS_n , a la cual asociamos un vector \mathbf{a}_n normal que satisface la regla de la mano derecha con el sentido de recorrido establecido para el perímetro Γ_n de ΔS_n , vale:

$$(\nabla \times \mathbf{A})_n = \lim_{\Delta S_n \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S_n} \oint_{\Gamma_n} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell} \quad (1.39)$$

Si las ΔS_n se toman lo suficientemente pequeñas como para considerar que el rotacional del campo \mathbf{A} sea constante sobre ellas, se podrá escribir:

$$\begin{aligned}(\nabla \times \mathbf{A})_n &\approx \frac{1}{\Delta S_n} \oint_{\Gamma_n} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell} \\(\nabla \times \mathbf{A})_n \Delta S_n &\approx \oint_{\Gamma_n} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell} \\ \nabla \times \mathbf{A} \cdot \Delta S_n \mathbf{a}_n &\approx \oint_{\Gamma_n} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell}\end{aligned}\tag{1.40}$$

aproximación que mejora en la medida que los ΔS_n se hacen cada vez más pequeños, en cuyo límite: $N \rightarrow \infty$.

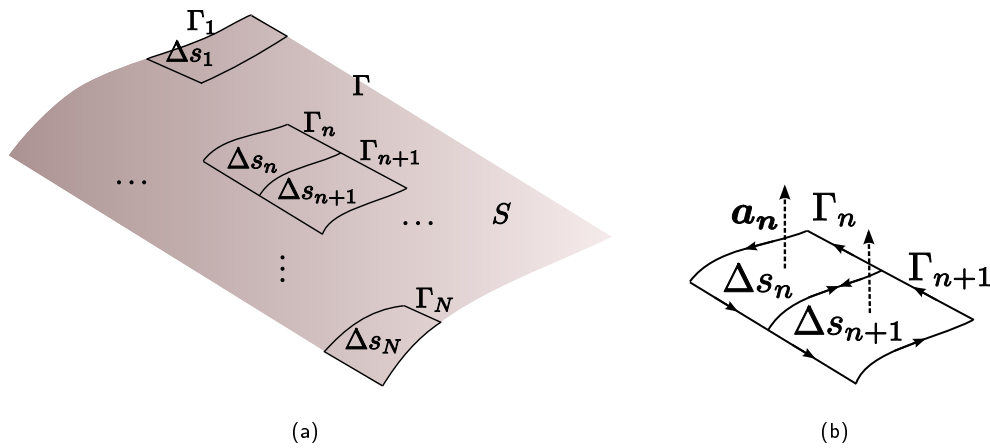


Figura 1.10: (a) Superficie abierta para la ilustración del Teorema de Stokes y (b) detalle de un par de superficies incrementales contiguas.

Siendo la Ecuación (1.40) cierta para cada elemento incremental de superficie, también lo será para la suma:

$$\sum_{n=1}^N \nabla \times \mathbf{A} \cdot \Delta \mathbf{S}_n \approx \sum_{n=1}^N \oint_{\Gamma_n} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell}\tag{1.41}$$

donde $\Delta \mathbf{S}_n = \Delta S_n \mathbf{a}_n$. En el proceso de limite, la aproximación se convierte en una igualdad:

$$\lim_{\substack{\Delta S_n \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \sum_{n=1}^N \nabla \times \mathbf{A} \cdot \Delta \mathbf{S}_n = \lim_{\substack{\Delta S_n \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \sum_{n=1}^N \oint_{\Gamma_n} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell}\tag{1.42}$$

Para el miembro de la derecha de la ecuación (1.42), en particular, se tiene:

$$\lim_{\substack{\Delta S_n \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \sum_{n=1}^N = \int_S\tag{1.43}$$

$$\lim_{\substack{\Delta S_n \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \Delta \mathbf{S}_n = d\mathbf{s}\tag{1.44}$$

y

$$\lim_{\substack{\Delta S_n \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \sum_{n=1}^N \nabla \times \mathbf{A} \cdot \Delta \mathbf{S}_n = \int_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} \quad (1.45)$$

Para resolver el límite del miembro de la derecha de la Ecuación (1.42), nos basaremos en el hecho de que en el cómputo de la circulación de \mathbf{A} a lo largo del contorno Γ_n , en el tramo común a dos superficies incrementales contiguas —ver figura 1.10(b)—, la integral de contorno se debe evaluar, para una superficie dada, dígase ΔS_n , en un sentido, mientras que para la superficie contigua, dígase ΔS_{n+1} , en sentido contrario.

Esta situación reduce la suma de las integrales de contorno sobre los perímetros Γ_n , con $n = 1, 2, \dots, N$, a la suma de las integrales de línea sobre aquellos tramos que yacen sobre la curva exterior Γ , siendo Γ , como sabemos, el contorno que define la superficie abierta S . Esto es:

$$\lim_{\substack{\Delta S_n \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \sum_{n=1}^N \oint_{\Gamma_n} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \oint_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell} \quad (1.46)$$

Juntando ambos resultados, ecuaciones (1.45) y (1.46), obtenemos el denominado Teorema de Stokes:

$$\int_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \oint_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell} \quad (1.47)$$

1.5.4. Definición alternativa del rotacional de un campo vectorial

Una definición alternativa del rotacional de un campo vectorial es [8]:

$$\nabla \times \mathbf{A} = \lim_{\Delta \nu \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta \nu} \oint_{S(\Delta \nu)} \mathbf{a}_{ni} \times \mathbf{A} \, ds \quad (1.48)$$

A partir de la definición alternativa del rotacional de un campo vectorial expresada por la ecuación (1.48), es posible establecer la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta \nu_i \rightarrow 0} (\nabla \times \mathbf{A})_i \Delta \nu_i &= \oint_{S_i(\Delta \nu_i)} \mathbf{a}_{ni} \times \mathbf{A}_i \, ds_i \\ \sum_{i=1}^N \lim_{\Delta \nu_i \rightarrow 0} (\nabla \times \mathbf{A})_i \Delta \nu_i &= \sum_{i=1}^N \oint_{S_i(\Delta \nu_i)} \mathbf{a}_{ni} \times \mathbf{A}_i \, ds_i \\ \lim_{\Delta \nu_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N (\nabla \times \mathbf{A})_i \Delta \nu_i &= \sum_{i=1}^N \oint_{S_i(\Delta \nu_i)} \mathbf{a}_{ni} \times \mathbf{A}_i \, ds_i \\ \int_V \nabla \times \mathbf{A} \, d\nu &= \oint_{S(V)} \mathbf{a}_n \times \mathbf{A} \, ds \end{aligned} \quad (1.49)$$

Problema

Dado el campo

$$\mathbf{A} = \mathbf{a}_p \times \frac{\mathbf{a}_r}{r^2}$$

donde \mathbf{a}_p es un vector unitario arbitrariamente orientado en el espacio puesto en el origen, calcule $\nabla \times \mathbf{A}$ apoyándose en la ecuación (1.49).

1.6. Identidades nulas

1.6.1. $\nabla \times (\nabla V) = 0$

Todo campo vectorial derivado del gradiente de un campo escalar es irrotacional. Esta identidad nula se puede interpretar físicamente teniendo presente que un campo de gradiente es un campo de líneas abiertas y por tanto no circula alrededor de ningún punto.

La lectura en sentido inverso de esta identidad dice que todo campo \mathbf{F}_i irrotacional, $\nabla \times \mathbf{F}_i = 0$, se puede expresar como el gradiente de cierto campo escalar : $\mathbf{F}_i = -\nabla V$.

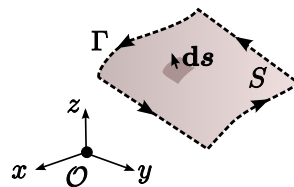


Figura 1.11: Superficie abierta S arbitraria y su contorno Γ para la comprobación de la identidad nula $\nabla \times \nabla V = 0$.

Comprobación Dado un contorno cerrado Γ arbitrario y una cualquiera de las superficies tendidas por él, dígame S , como se ilustra en la Fig. 1.11, al calcular el flujo de $\nabla \times \mathbf{F}_i$ a través de S , $\int_S \nabla \times \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{s}$, y al aplicar el Teorema de Stokes se obtiene:

$$\begin{aligned} \int_S \nabla \times \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{s} &= \oint_{\Gamma(S)} -\nabla V \cdot d\boldsymbol{\ell} \\ &= \oint_{\Gamma} dV \\ &= V(p_f) - V(p_i) \\ &= 0 \end{aligned}$$

donde $p_{i,f}$ son los puntos inicial y final, los cuales coinciden.

Problema

Dado un campo \mathbf{F} , si la integral de línea $\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\ell}$ es independiente del camino Γ de integración, entonces el mencionado campo se denomina *campo conservativo*. Demuestre que si $\mathbf{F} = \nabla\Phi$, entonces \mathbf{F} es conservativo.

Problema

Dado un campo \mathbf{F} conservativo, obtenga Φ a partir de \mathbf{F} tomando en cuenta que $\frac{\partial\Phi}{\partial x} = F_x$, $\frac{\partial\Phi}{\partial y} = F_y$ $\frac{\partial\Phi}{\partial z} = F_z$.

Resp.: En la página 92 de [1] se ilustra la aplicación de tres métodos para resolver este problema. El más elegante consiste en seleccionar una poligonal entre los puntos $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y $P(x, y, z)$ e integrar a \mathbf{F} a lo largo de los tramos paralelos a los ejes coordenados para obtener

$$\begin{aligned}\Phi(x, y, z) - \Phi_0 &= \int_{r_0}^r \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\ell} \\ &= \int_{x_0}^x F_x dx + \int_{y_0}^y F_y dy + \int_{z_0}^z F_z dz\end{aligned}$$

Ejemplo

1. Dado el campo $\mathbf{F} = a_x + 2y a_y$

- calcule $\oint_{\Gamma_1} \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\ell}$ (Fig. 1.12),
- si \mathbf{F} fuera de la forma $\mathbf{F} = \nabla\Phi$, calcule $\Phi(x, y, z)$, a menos de una constante.

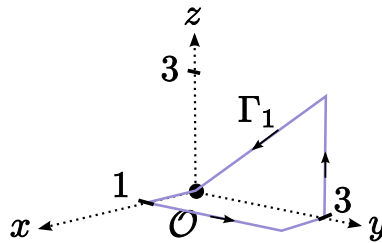


Figura 1.12: Contorno Γ_1 para el cálculo de $\oint_{\Gamma_1} \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\ell}$.

Solución

1. Antes de embarcarnos en el cálculo de la integral de línea verificaremos que el campo no circule. Para ello tomaremos el rotacional del campo

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{F} &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{a}_z \right) \times (\mathbf{a}_x + 2y\mathbf{a}_y) \\ &= 0\end{aligned}$$

lo cual comprueba que el campo no rota.

- a) Empleando el Teorema de Stokes se obtiene que $\oint_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\ell} = 0$, sin necesidad de integrar propiamente.
- b) Efectivamente, como $\nabla \times \mathbf{F} = 0$, se podrá escribir $\mathbf{F} = \nabla\Phi$

$$\mathbf{F} = \frac{\partial\Phi}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial\Phi}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial\Phi}{\partial z} \mathbf{a}_z$$

de modo que, por comparación, se deduce que: $\frac{\partial\Phi}{\partial x} = 1$ y $\frac{\partial\Phi}{\partial y} = 2y$. De esta forma

$$\begin{aligned}\int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\ell} &= \int_0^x \frac{\partial\Phi}{\partial x} dx + \int_0^y \frac{\partial\Phi}{\partial y} dy \\ &= x + y^2\end{aligned}$$

y por tanto

$$\Phi(x, y) = x + y^2 + C$$

1.6.2. $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{J}) = 0$

Todo campo vectorial derivado del rotacional de otro campo vectorial es solenoidal. Esta identidad nula se puede interpretar físicamente teniendo presente que un campo de rotacional³ es un campo de líneas cerradas y por tanto no diverge de ningún punto.

La lectura en sentido inverso de esta identidad dice que todo campo \mathbf{F}_s solenoidal, $\nabla \cdot \mathbf{F}_s = 0$, se puede expresar como el rotacional de cierto campo vectorial : $\mathbf{F}_s = \nabla \times \mathbf{J}$.

Comprobación

Para comprobar esta identidad podemos postular que $\mathbf{F}_s = \nabla \times \mathbf{J}$ y tomar la integral de volumen de la divergencia de \mathbf{F}_s , en el volumen encerrado por la superficie arbitraria S que se muestra en la Fig. 1.13(a).

³Esto es: que se obtiene como rotacional de otro campo vectorial.

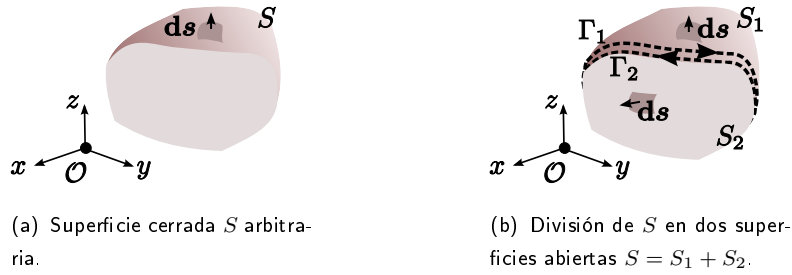


Figura 1.13: Superficie S cerrada arbitraria para la comprobación de la identidad $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = 0$.

Aplicando el Teorema de la Divergencia, esta integral se la puede convertir en una integral de superficie: $\int_V \nabla \cdot \mathbf{F}_s \, d\nu = \oint_{S(V)} \mathbf{F}_s \cdot \mathbf{ds}$. Como la superficie cerrada S puede ser dividida en dos superficies abiertas S_1 y S_2 , de respectivos contornos Γ_1 y Γ_2 , tal que $S = S_1 + S_2$ como se muestra en la Fig. 1.13(b), de la misma manera, la integral de flujo se puede expandir en la suma de los flujos parciales a través de tales superficies S_1 y S_2 : $\oint_{S(V)} \mathbf{F}_s \cdot \mathbf{ds} = \int_{S_1} \mathbf{F}_s \cdot \mathbf{ds} + \int_{S_2} \mathbf{F}_s \cdot \mathbf{ds}$. Aplicando el Teorema de Stokes a cada una de estas integrales se obtiene

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{F}_s \, d\nu = \oint_{\Gamma_1} \mathbf{J} \cdot \mathbf{dl} + \oint_{\Gamma_2} \mathbf{J} \cdot \mathbf{dl}$$

donde, tomando en cuenta el sentido en que deben ser recorridos los caminos Γ_1 y Γ_2 -ver Fig. 1.13(b)-, se comprueba que $\oint_{\Gamma_1} \mathbf{J} \cdot \mathbf{dl} = -\oint_{\Gamma_2} \mathbf{J} \cdot \mathbf{dl}$. Por lo anterior sigue que $\int_V \nabla \cdot \mathbf{F}_s \, d\nu = 0$. Y como esto es cierto para cualquier volumen, sigue que $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{J}) = 0$.

1.7. Condiciones de borde

En la superficie de separación de dos regiones en las que, por razones vinculadas a las distintas propiedades físicas de los medios que llenan tales regiones, cierto campo manifiesta un cambio discreto, el campo está obligado a cumplir ciertas condiciones, las cuales se derivan de su estructura (especificada mediante su $\nabla \cdot$ y su $\nabla \times$), denominadas condiciones de borde.

Sea \mathbf{A} tal campo, y sea h el espesor alrededor de la superficie de contacto entre las dos regiones en el que las propiedades físicas de los dos medios cambian de un valor dado en la región 1, a otro valor en la región 2. Las mencionadas condiciones

de borde se expresan de la forma:

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_n \times (\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1) &= \lim_{h \rightarrow 0} (h \nabla \times \mathbf{A}) \\ \mathbf{a}_n \cdot (\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1) &= \lim_{h \rightarrow 0} (h \nabla \cdot \mathbf{A})\end{aligned}$$

donde \mathbf{a}_n va del medio 1 al medio 2.

Ya que $\nabla \times \mathbf{A}$ y $\nabla \cdot \mathbf{A}$ representan las densidades en un volumen de las fuentes vectoriales y escalares de \mathbf{A} , respectivamente, los límites $\lim_{h \rightarrow 0} (h \nabla \times \mathbf{A})$ y $\lim_{h \rightarrow 0} (h \nabla \cdot \mathbf{A})$, los cuales implican la contracción del volumen a una superficie, vienen a representar las densidades sobre esta superficie de tales fuentes.

1.8. Teorema de HELMHOLTZ

El Teorema de HELMHOLTZ establece que el conocimiento de las fuentes del campo implica el conocimiento del campo y se le suele enunciar, en general, de dos formas: para problemas de dominio abierto y para problemas de dominio cerrado. Los problemas de dominio abierto –ver Fig. 1.14(a)– involucran todo el espacio y presuponen la inexistencia de fuentes del campo en el infinito. En los problemas de dominio cerrado –ver Fig. 5.3– nos interesa conocer el campo en una región determinada delimitada por una superficie exterior, existiendo un gran espacio entre esta superficie y el infinito de la que no se posee información. En esta clase de problemas, además de las fuentes primarias del campo en la región de interés, se requiere de las componentes tangencial y normal del campo sobre la superficie que delimita la región de estudio. Estas componentes del campo se comportan como unas fuentes distribuidas superficiales equivalentes, las cuales modelan las fuentes reales del campo que quedan fuera de la región de estudio. En la Figura 1.14 se ilustran ambos escenarios.

1.8.1. Dominios abiertos

Un campo vectorial \mathbf{F} descrito por su divergencia $\nabla \cdot \mathbf{F}$ y su rotacional $\nabla \times \mathbf{F}$, como se ilustra en la Fig. 1.14(a), tal que no posea fuentes en el infinito, esto es:

$$[\nabla \cdot \mathbf{F}]_\infty = 0 \tag{1.50}$$

$$[\nabla \times \mathbf{F}]_\infty = 0 \tag{1.51}$$

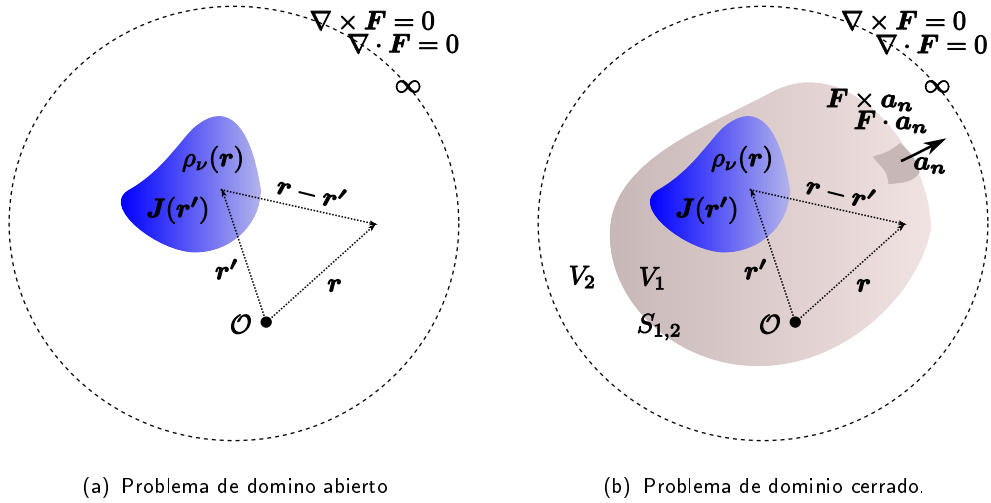


Figura 1.14: Escenarios para el enunciado del Teorema de HELMHOLTZ. En ambos escenarios supondremos que las fuentes primarias del campo se distribuyen en un volumen V' en los «predios» del observador. 1.14(a): La región de interés es todo el espacio y se presupone que no existan fuentes del campo en el infinito. 5.3: La región de interés llena un volumen V_1 delimitado por la superficie $S_{1,2}$, la cual hace de frontera con el espacio exterior (volumen V_2).

se lo puede expresar como la suma de una componente irrotacional y una componente solenoidal⁽⁴⁾:

$$\mathbf{F} = -\nabla\phi + \nabla \times \mathbf{A} \quad (1.52)$$

donde:

$$\phi = \int_{V'} \frac{1}{4\pi} \frac{\nabla \cdot \mathbf{F}}{R} d\nu' \quad (1.53)$$

$$\mathbf{A} = \int_{V'} \frac{1}{4\pi} \frac{\nabla \times \mathbf{F}}{R} d\nu' \quad (1.54)$$

Demostración

Para comprobar el Teorema de HELMHOLTZ ponemos:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_i + \mathbf{F}_s \quad (1.55)$$

tal que:

$$\nabla \cdot \mathbf{F}_i = \rho_\nu \quad (1.56)$$

$$\nabla \times \mathbf{F}_i = 0 \quad (1.57)$$

⁴Las condiciones (1.50) y (1.51) implican la suposición de no existencia de fuentes del campo en el infinito.

$$\nabla \cdot \mathbf{F}_s = 0 \quad (1.58)$$

$$\nabla \times \mathbf{F}_s = \mathbf{J} \quad (1.59)$$

donde $\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{F}$ y $\rho_\nu = \nabla \cdot \mathbf{F}$.

Estudio de la componente irrotacional F_i del campo. De acuerdo a la Ec. (1.57), se puede escribir:

$$\mathbf{F}_i = -\nabla\phi \quad (1.60)$$

que al sustituir en la Ec. (1.56) se obtiene:

$$\nabla \cdot (\nabla\phi) = -\rho_\nu \quad (1.61)$$

ó

$$\nabla^2\phi = -\rho_\nu \quad (1.62)$$

La solución de la Ec. (1.62), conocida como ecuación de POISSON, se puede hallar determinando la forma del operador inverso de ∇^2 : $\phi = -(\nabla^2)^{-1}\rho_\nu$, o sea:

$$(-\rho_\nu) \longrightarrow \boxed{(\nabla^2)^{-1}} \longrightarrow \phi$$

donde hemos puesto como *entrada* del *sistema* o *excitación*, la función densidad volumétrica de fuentes escalares ρ_ν , y como *salida* la función potencial escalar ϕ . El operador $(\nabla^2)^{-1}$ tendrá la forma de una integral de convolución:

$$\phi(\mathbf{r}) = \int_{V'} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')[-\rho_\nu(\mathbf{r}')] dV' \quad (1.63)$$

y su núcleo $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, denominado función de GREEN, será la respuesta impulsiva del *sistema*:

$$\delta(x-x')\delta(y-y')\delta(z-z') \longrightarrow \boxed{(\nabla^2)^{-1}} \longrightarrow G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$$

Esto es: la función $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ en el integral de la Ec. (1.63) es a su vez la solución de espacio libre de la ecuación:

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(x-x')\delta(y-y')\delta(z-z') \quad (1.64)$$

donde $\delta(x - x')\delta(y - y')\delta(z - z')$ es una excitación espacial impulsiva⁽⁵⁾ localizada en $\mathbf{r}' = x'\mathbf{a}_x + y'\mathbf{a}_y + z'\mathbf{a}_z$, la cual se define de la manera siguiente:

$$\delta(x - x')\delta(y - y')\delta(z - z') = 0, \quad \forall(x, y, z) \neq (x', y', z') \quad (1.65)$$

tal que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x, y, z)\delta(x - x')\delta(y - y')\delta(z - z') = \phi(x', y', z') \quad (1.66)$$

Mientras $\delta(x - x')\delta(y - y')\delta(z - z')$ representa, como se ha dicho, una fuente puntual colocada en \mathbf{r}' , $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ representa el potencial producido por dicha fuente en el punto \mathbf{r} , con $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}'$.

La Ecuación (1.64) se puede resolver teniendo presente que, al tratarse de una fuente puntual, el problema tiene simetría esférica, y la Ec. (1.64) asume la forma:

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left[R^2 \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial R} \right] = f(R) \quad (1.67)$$

donde $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$, y $f(R)$ es la función impulsiva en el sistema de coordenadas esféricas, esto es:

$$f(R) = \frac{1}{4\pi} \frac{\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{R^2} \quad (1.68)$$

En efecto, al integrar en todo el espacio, definiendo las variables θ y φ a partir del «origen excéntrico» \mathbf{r}' será:

$$\int_{R=0}^{R=\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \phi(\mathbf{r}) \frac{1}{4\pi} \frac{\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{R^2} R^2 \sin\theta d\theta d\varphi dR = \phi(\mathbf{r}') \quad (1.69)$$

De este modo la Ec. (1.67) se puede escribir:

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left[R^2 \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial R} \right] = \frac{1}{4\pi} \frac{\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{R^2} \quad (1.70)$$

que para $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}'$, da lugar a la ecuación:

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left[R^2 \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial R} \right] = 0 \quad (1.71)$$

La solución de la Ec. (1.71) es:

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{A}{R} + B \quad (1.72)$$

Los valores de las constantes A y B se pueden determinar:

⁵ $\delta(x - x')\delta(y - y')\delta(z - z')$ corresponde a una fuente escalar puntual del campo.

(i) Dado que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0 \quad (1.73)$$

sigue que $B = 0$.

(ii) Dado que:

$$\int_V \nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d\nu = 1 \quad (1.74)$$

sigue que

$$-A \int_V \nabla^2 \left(\frac{1}{R} \right) d\nu = 1 \quad (1.75)$$

y tomando en cuenta que $\nabla^2 \left(\frac{1}{R} \right) = \nabla \cdot \left[\nabla \left(\frac{1}{R} \right) \right]$ y que $\nabla \left(\frac{1}{R} \right) = -\frac{\mathbf{a}_R}{R^2}$, sigue que

$$-A \int_V \nabla \cdot \left[\nabla \left(\frac{1}{R} \right) \right] d\nu = 1 \quad (1.76)$$

$$A \int_V \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{a}_R}{R^2} \right) d\nu = 1 \quad (1.77)$$

Al tomar una superficie esférica con centro en \mathbf{r}' y al aplicar el Teorema de la divergencia se obtiene:

$$A \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\mathbf{a}_R}{R^2} \cdot R^2 \sin \theta d\theta d\varphi \mathbf{a}_R = 1 \quad (1.78)$$

$$A \underbrace{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta d\theta d\varphi}_{4\pi} = 1 \quad (1.79)$$

y

$$A = \frac{1}{4\pi} \quad (1.80)$$

De este modo obtenemos:

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{R} \quad (1.81)$$

y finalmente la solución para $\phi(\mathbf{r})$, al sustituir la Ec. (1.81) en la Ec. (1.63), es:

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\rho_\nu(\mathbf{r}')}{R} d\nu' \quad (1.82)$$

Estudio de la componente solenoidal F_s del campo. De acuerdo a la Ec. (1.58), se puede escribir:

$$\mathbf{F}_s = \nabla \times \mathbf{A} \quad (1.83)$$

que al sustituir en la Ec. (1.59), se obtiene

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \mathbf{J} \quad (1.84)$$

ó

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mathbf{J} \quad (1.85)$$

Si asumimos que $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ ⁽⁶⁾, la Ec. (1.85) asume la forma:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mathbf{J} \quad (1.86)$$

que en coordenadas Cartesianas da lugar a tres ecuaciones escalares:

$$\begin{aligned} \nabla^2 A_x &= -J_x \\ \nabla^2 A_y &= -J_y \\ \nabla^2 A_z &= -J_z \end{aligned} \quad (1.87)$$

Ya que las Ecs (1.87) tienen la misma forma de la Ec. (1.62), las soluciones de las primeras tendrán igualmente la misma forma de la solución de la segunda:

$$A_x = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{J_x(\mathbf{r}')}{R} d\nu' \quad (1.88)$$

$$A_y = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{J_y(\mathbf{r}')}{R} d\nu' \quad (1.89)$$

$$A_z = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{J_z(\mathbf{r}')}{R} d\nu' \quad (1.90)$$

De este modo la solución de la Ec. (1.86) es:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{R} d\nu' \quad (1.91)$$

En particular, sustituyendo las expresiones de las Ecs. (1.82) y (11.119) en la Ec. (1.52) se obtiene⁷:

$$\mathbf{F} = -\nabla \underbrace{\left[\frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\rho_\nu(\mathbf{r}')}{R} d\nu' \right]}_{\phi} + \nabla \times \underbrace{\left[\frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{R} d\nu' \right]}_{\mathbf{A}} \quad (1.92)$$

si se sustituyen en esta ecuación, las expresiones dadas en las Ecs. (1.56) y (1.59), se obtiene la siguiente ecuación equivalente:

$$\mathbf{F} = -\nabla \underbrace{\left[\frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\nabla \cdot \mathbf{F}}{R} d\nu' \right]}_{\phi} + \nabla \times \underbrace{\left[\frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\nabla \times \mathbf{F}}{R} d\nu' \right]}_{\mathbf{A}} \quad (1.93)$$

Otra forma equivalente de la Ec. (7.11) se obtiene de la siguiente manera:

⁶Luego se comprobará que la solución para \mathbf{A} que se obtiene efectivamente satisface $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$

⁷Utilizando las identidades vectoriales: $\nabla(\phi\psi) = \phi\nabla\psi + \psi\nabla\phi$ y $\nabla \times (\phi\mathbf{A}) = \phi\nabla \times \mathbf{A} + \nabla\phi \times \mathbf{A}$

$$\begin{aligned}
\mathbf{F} &= -\nabla \left[\underbrace{\frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\rho_\nu(\mathbf{r}')}{R} d\nu'}_\phi \right] + \nabla \times \left[\underbrace{\frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{R} d\nu'}_A \right] \\
&= -\frac{1}{4\pi} \int_V \nabla \left[\frac{\rho_\nu(\mathbf{r}')}{R} \right] d\nu' + \frac{1}{4\pi} \int_V \nabla \times \left[\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{R} \right] d\nu' \\
&= \underbrace{\frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\rho_\nu(\mathbf{r}')}{R^2} \mathbf{a}_R d\nu'}_{F_i} + \underbrace{\frac{1}{4\pi} \int_V \mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{a}_R}{R^2} d\nu'}_{F_s}
\end{aligned} \tag{1.94}$$

1.8.2. Dominios cerrados

En los problemas de dominio cerrado, como el que se muestra en la Fig. 5.3 en la pág. 83, el campo \mathbf{F} aun se podrá descomponer en la suma de una componente irrotacional y una componente solenoidal según la Ec. (1.52), solo que la funciones potenciales se han de modificar para tener en cuenta las densidades de fuentes superficiales equivalentes sobre la superficie exterior $S_{1,2}$ de la región de estudio:

$$\phi = \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \frac{\nabla \cdot \mathbf{F}}{R} d\nu' - \frac{1}{4\pi} \oint_{S_{1,2}} \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{a}_n}{R} ds' \tag{1.95}$$

$$\mathbf{A} = \int_{V'} \frac{1}{4\pi} \frac{\nabla \times \mathbf{F}}{R} d\nu' + \frac{1}{4\pi} \oint_{S_{1,2}} \frac{\mathbf{F} \times \mathbf{a}_n}{R} ds' \tag{1.96}$$

1.9. Problemas propuestos

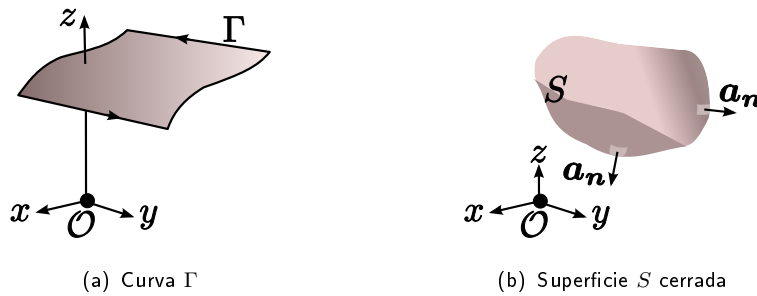


Figura 1.15: Figuras de interés del Problema 1.

1. Dado el campo $\mathbf{A} = \frac{1}{\rho}(\mathbf{a}_\rho + \mathbf{a}_\varphi)$, calcule

a) Las fuentes vectoriales enlazadas por Γ –Fig. 1.15(a)–.

- b) Las fuentes escalares contenidas en S –Fig. 1.15(b)–.
2. Dado el campo \mathbf{F} definido por $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{J}$ y $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$, y dada la superficie $S_1 + S_2$ que se ilustra en la Fig. 1.3(a), compruebe que $|\int_{S_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}| - |\int_{S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}| = 0$.
3. Dado el campo \mathbf{F} definido por $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ y $\nabla \cdot \mathbf{F} = \rho_v$, y dado el contorno $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ que se ilustra en la Fig 1.16(a), compruebe que $|\int_{\Gamma_1} \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\ell}| - |\int_{\Gamma_2} \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\ell}| = 0$.

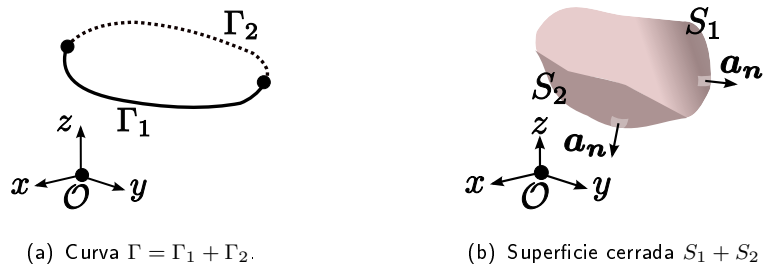


Figura 1.16: Figuras de interés de los Problemas 2 y 3.

4.

Capítulo 2

Campo Electroestático

2.1. Ley de COULOMB

COULOMB estableció experimentalmente que sobre dos cargas eléctricas puntuales q_1 y q_2 , separadas una distancia R , actúa una fuerza F , la cual se denomina fuerza electrostática, que es proporcional al producto de las cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia:

$$F \propto \frac{q_1 q_2}{R^2} \quad (2.1)$$

Si q_1 y q_2 son de polaridad opuesta, la fuerza es de atracción, y si q_1 y q_2 son de la misma polaridad, la fuerza es de repulsión. Además, la fuerza es colineal con el vector que une las dos cargas. Vectorialmente se escribe (figura 2.1):

$$\mathbf{F}_{21} = k_e \frac{q_1 q_2}{R_{21}^2} \mathbf{a}_{R_{21}} \quad (2.2)$$

donde $\mathbf{R}_{21} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ y $\mathbf{a}_{R_{21}} = \mathbf{R}_{21}/R_{21}$.

En el sistema internacional SI de medidas, la constante de proporcional k_e tiene un valor numérico de 9×10^9 y se suele expresar como $k_e = 1/4\pi\epsilon_0$, donde ϵ_0 es otra constante denominada permitividad eléctrica del vacío la cual posee unidades de [Faradios/m]-



Figura 2.1: Dos cargas puntuales separadas una distancia R_{21} .

2.2. Campo electrostático

La Ecuación (2.2) no contempla la dependencia temporal de la fuerza electrostática, de modo que no se puede deducir de ella como transcurre la interacción entre las

cargas desde el momento inicial en el que las cargas son colocadas en sus respectivas posiciones fijas. En su época, COULOMB no sabía que estaba proponiendo una ley que solo describe el régimen permanente de la interacción entre cargas que permanecen quietas por un tiempo oportunamente extenso. La ley de COULOMB implica lo que se suele convenir una acción a distancia, una suerte de interacción «mágica» que se propaga a una velocidad infinita. Claramente esto no es cierto. Hoy día se conviene en aceptar que cada carga impregna su entorno de cierta propiedad que convencionalmente se denomina «campo eléctrico», el cual lo llena todo. El campo eléctrico es el mediador de la interacción con el resto de las cargas del universo. Si la carga cambia de estado, acelerándose, las variaciones imprimidas al campo eléctrico se propagan desde la carga hacia el infinito a la velocidad de la luz. Solo cuando las variaciones del campo hayan cesado, sea porque la carga se ha aquietado o porque ha alcanzado una velocidad rectilínea uniforme, y las variaciones asociadas hayan recorrido todo el espacio, el campo vuelve a ser «electrostático». Por esta razón, para apreciar en todos los puntos del espacio un campo electrostático a partir de la conformación de cierta agrupación de cargas quietas, habría que esperar un tiempo infinito, a menos que solo se tomara en consideración una región limitada alrededor de la agrupación, en cuyo caso el campo se podría apreciar como electrostático en un tiempo aceptable.

Para medir el campo eléctrico producido por una carga puntual q fija se deberá introducir en los predios de q una *carga de prueba* Q suficientemente pequeña como para no perturbar el campo de la carga fija, medir la fuerza sobre Q , y dividir la fuerza por el valor de Q . Matemáticamente escribiremos

$$\mathbf{E} = \lim_{Q \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}}{Q} \quad (2.3)$$

Con base en la Ec. (2.2) y la definición dada mediante la Ec. (2.3), una carga puntual puesta en \mathbf{r}' produce en \mathbf{r} un campo electrostático dado por:

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (2.4)$$

El vector \mathbf{r}' es el vector de posición del **punto fuente** y el vector \mathbf{r} es el vector de posición del **punto de observación**.

Si se admite el carácter lineal del espacio libre y se postula, artificialmente, que sea posible agrupar cualquier cantidad de cargas de una misma polaridad en una región del espacio, y que éstas puedan permanecer quietas en sus respectivas posiciones a pesar de la acción repulsiva del campo que ellas mismas producen, la

Ec. 2.4 se puede generalizar para describir el campo que producen N cargas discretas fijas en el espacio o infinitas cargas infinitesimales distribuidas formando una línea, una superficie o un volumen, igualmente suspendidas en el vacío. En la Fig. 2.2 se ilustran las diferentes distribuciones idealizadas de carga eléctrica.

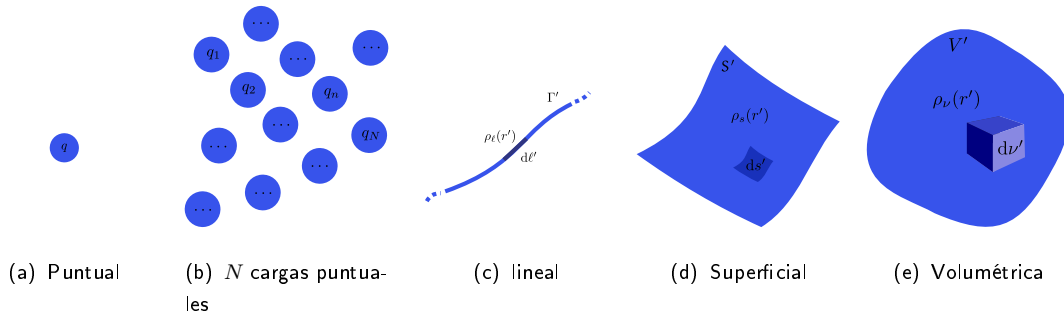


Figura 2.2: Diferentes distribuciones idealizadas de carga eléctrica.

La expresión del campo eléctrico para las distintas distribuciones de carga ilustradas en la Fig. 2.2 se resumen en el Cuadro 2.1.

Cuadro 2.1: Expresión del campo electrostático para las distintas distribuciones de carga ilustradas en la Fig. 2.2. En las expresiones de los campos $\mathbf{R}_n = \mathbf{r} - \mathbf{r}_n$, $\mathbf{a}_{R_n} = \mathbf{R}_n/R_n$, $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ y $\mathbf{a}_R = \mathbf{R}/R$.

Distribución	Campo Eléctrico
Una carga puntual	$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2} \mathbf{a}_R$
N cargas puntuales	$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_n^N q_n \frac{\mathbf{a}_{R_n}}{R_n^2}$
Distribución lineal	$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Gamma'} \rho_l(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{a}_R}{R^2} dl'$
Distribución superficial	$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S'} \rho_s(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{a}_R}{R^2} ds'$
Distribución volumétrica	$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \rho_v(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{a}_R}{R^2} dv'$

La solución del campo eléctrico mediante la integración de las distribuciones de carga es, en general, impracticable. Solo para unas cuantas distribuciones altamente simétricas tales integrales tienen una solución cerrada.

Ejemplos

Cuando la integración de las cargas para determinar el campo es posible, el trabajo matemático se facilita si se descubre, anticipadamente, el sistema de coordenadas en el cual la expresión buscada del campo resulta más simple. Dicho sistema de coordenadas se denominará «natural» para ese campo y le conferirá el nombre a la simetría del problema. Por ejemplo, el campo producido por una línea infinita de cargas, distribuidas uniformemente, se expresará de manera natural en un sistema de coordenadas cilíndricas, y por ende diremos que dicho problema presenta simetría cilíndrica.

Línea de carga infinita y uniforme

El campo producido por una distribución de carga a lo largo de una línea infinita con una densidad lineal uniforme de ρ_ℓ [C/m] vale $\mathbf{E} = \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{a}_\rho}{\rho}$. Este resultado se obtiene al resolver la integral $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Gamma'} \rho_\ell(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} d\ell'$ para los puntos de un plano cualquiera transversal a la distribución y poniendo la distribución coincidente con el eje z . Sobre dicho plano el diferencial de campo vale $d\mathbf{E} = \frac{\rho_\ell dz'}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho\mathbf{a}_\rho - z'\mathbf{a}_z}{(\rho^2 + z'^2)^{3/2}}$, como la componente en \mathbf{a}_z se cancela, resulta

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\rho) &= \frac{\rho_\ell}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho dz' \mathbf{a}_\rho}{(\rho^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{\rho_\ell}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\rho} \left(\frac{z'}{\sqrt{\rho^2 + z'^2}} \right)_{-\infty}^{\infty} \mathbf{a}_\rho \\ &= \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{a}_\rho}{\rho} \end{aligned}$$

Plano infinito y uniforme

El campo producido por una distribución de carga en un plano infinito con una densidad superficial uniforme de ρ_s [C/m²] vale $\mathbf{E} = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \mathbf{a}_n$, siendo \mathbf{a}_n un vector unitario normal al plano. Este resultado se obtiene al resolver la integral $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S'} \rho_s(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} ds'$ para los puntos de un eje cualquiera perpendicular a la distribución y poniendo la distribución coincidente con el plano $z = 0$. Sobre la porción positiva de dicho eje el diferencial de campo vale $d\mathbf{E} = \frac{\rho_s \rho' d\rho' d\varphi'}{4\pi\epsilon_0} \frac{-\rho' \mathbf{a}'_\rho + z \mathbf{a}_z}{(\rho'^2 + z^2)^{3/2}}$,

como la componente en \mathbf{a}_ρ se cancela, resulta

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \frac{\rho_s}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \frac{\rho' z d\rho' d\varphi'}{(\rho'^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \mathbf{a}_z \\ &= \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} z \left(\frac{-1}{\sqrt{\rho'^2 + z^2}} \right)_0^\infty \mathbf{a}_z \\ &= \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \mathbf{a}_z\end{aligned}$$

2.2.1. Divergencia del campo electrostático

Calcularemos la divergencia del campo electrostático basándonos en la expresión general del campo $\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \rho_\nu(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{a}_R}{R^2} dV'$:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \rho_\nu(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{a}_R}{R^2} dV' \right]$$

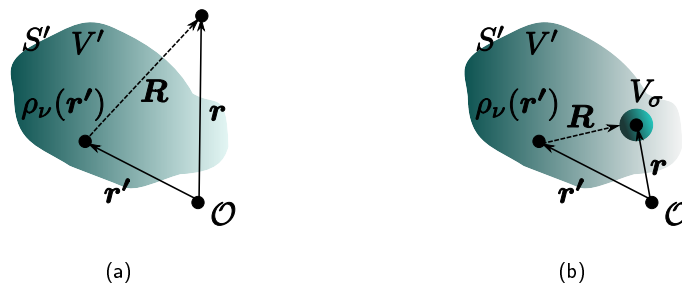


Figura 2.3: Representación gráfica de la distribución volumétrica de carga y el punto de observación. En 10.1(a) se muestra un punto fuera de la distribución. En 2.3(b) se muestra un punto dentro de la distribución, aislado del resto de los puntos fuentes mediante un volumen V_σ .

Tomando en cuenta que el operador divergencia opera sobre las variables no primadas se puede ingresar dentro de la integral:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= \nabla \cdot \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \rho_\nu(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{a}_R}{R^2} dV' \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \rho_\nu(\mathbf{r}') \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{a}_R}{R^2} \right) dV'\end{aligned}$$

y como:

$$\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{a}_R}{R^2} \right) = \begin{cases} 0 & r \neq r' \\ 4\pi\delta(r - r') & r = r' \end{cases}$$

resultando que para cualquier punto fuera de la distribución –ver Fig. 10.1(a)– la divergencia del campo electrostático es nula, lo cual era de esperarse ya que las

fuentes escalares del campo electrostático son las propias cargas eléctricas. En el interior de la distribución –ver Fig. 2.3(b)–, para el cálculo de $\nabla \cdot \mathbf{E}$, procederemos a aislar el punto de observación y a dividir la integral en dos partes: una parte sobre el volumen de la distribución menos el punto de observación considerado, y otra parte sobre el propio punto de observación. Llamando el volumen del punto de observación V_σ , y siendo éste en principio de forma esférica, de radio σ , tal que σ tienda a cero a partir de un valor inicialmente ya pequeño, se tiene:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'-V_\sigma} \rho_\nu(\mathbf{r}') \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{a}_R}{R^2} \right) dV' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_\sigma} \rho_\nu(\mathbf{r}') \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{a}_R}{R^2} \right) dV'$$

en la primera de las integrales, r' se pasará solo por los puntos de $V - V_\sigma$ por lo que $r \neq r'$ y $\nabla \cdot (\mathbf{a}_R/R^2) = 0$, mientras que en la segunda de las integrales, ρ_ν se comportará como una constante, en particular asumirá el valor que le corresponde en el punto de observación $r' = r$, y allí $\nabla \cdot (\mathbf{a}_R/R^2) = 4\pi\delta(r - r')$, de tal suerte que se obtiene:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V-V_\sigma} \rho_\nu(\mathbf{r}') \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{a}_R}{R^2} \right) dV'}_0 + \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_\sigma} \underbrace{\rho_\nu(\mathbf{r}')}_{\rho_\nu(r)} \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{a}_R}{R^2} \right) dV'}_{\rho_\nu(r)4\pi} \\ &= \frac{\rho_\nu(r)}{\epsilon_0} \end{aligned} \quad (2.5)$$

2.2.2. Rotacional del campo electrostático

El rotacional del campo electrostático se puede calcular tomando el rotacional de la expresión general del campo eléctrico $\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \rho_\nu(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{a}_R}{R^2} dV'$, ingresando el operado $\nabla \times$ al interior de la integral y resolviendo el rotacional de $\frac{\mathbf{a}_R}{R^2}$.

Facilmente se puede comprobar que

$$-\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{R} = \frac{\partial}{\partial x'} \frac{1}{R} = \frac{x - x'}{R^3}$$

y por tanto

$$-\nabla \frac{1}{R} = \nabla' \frac{1}{R} = \frac{\mathbf{a}_r}{R^2}$$

resultando $\nabla \times (\nabla \frac{1}{R}) = 0$, y de esta manera

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (2.6)$$

2.2.3. Ecuaciones de MAXWELL para el campo electrostático

Juntando los resultados anteriores, Ecs. (8.22) y (2.6), se obtienen las denominadas Ecuaciones de MAXWELL para el Campo Electrostatico:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_\nu}{\varepsilon_0} \quad (2.7)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (2.8)$$

2.3. Ley de GAUSS

Dada una distribución volumétrica de carga $\rho_\nu(\mathbf{r}')$, distribuida en un volumen V' , se desea conocer el valor del flujo de su campo eléctrico \mathbf{E} a través de cierta superficie cerrada S , cuyo volumen interior V contiene una fracción ΔV de V' ($\Delta V = V \cap V'$), tal y como se muestra en la Fig. 2.4.

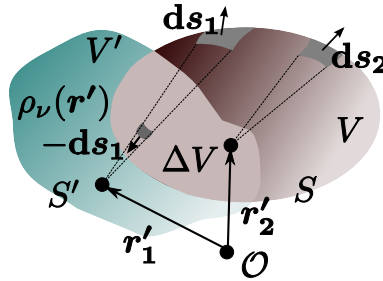


Figura 2.4: Cierta distribución de carga $\rho_\nu(\mathbf{r}')$ se distribuye en el volumen V' produciendo un campo eléctrico \mathbf{E} . Se desea calcular el flujo de este campo a través de una superficie cerrada S , cuyo interior contiene una porción $\Delta V = V \cap V'$ del volumen V' . El punto $\mathbf{r}'_2 \in \Delta V$. El punto $\mathbf{r}'_1 \in V' - \Delta V$. La Carga Q «atrapada» en el interior de S coincide con la contenida en ΔV : $Q = \int_{\Delta V} \rho_\nu(\mathbf{r}') dV'$

El flujo del campo eléctrico vale

$$\begin{aligned} \Phi_S^E &= \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \\ &= \oint_S \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_{V'} \rho_\nu(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{a}_r}{R^2} dV' \right] \cdot d\mathbf{s} \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_{V'} \rho_\nu(\mathbf{r}') \oint_S \frac{\mathbf{a}_r}{R^2} \cdot d\mathbf{s} dV' \end{aligned} \quad (2.9)$$

donde la cantidad subintegral $\mathbf{a}_R/R^2 \cdot d\mathbf{s}$ se conoce como **diferencial de ángulo sólido**.

En efecto, el ángulo sólido subtendido desde el punto fuente \mathbf{r}' por la superficie $d\mathbf{s}$ con centro en el punto de observación \mathbf{r} vale:

$$d\Omega = \frac{\mathbf{a}_R}{R^2} \cdot d\mathbf{s} \quad (2.10)$$

Se observa que los puntos de la distribución que se encuentran en el volumen común $\Delta V = V \cap V'$, e.g. \mathbf{r}'_2 en la Fig. 2.4, subtienden un diferencial de ángulo sólido que se mantiene de un solo signo mientras la superficie S es recorrida en el proceso de integración del flujo, e.g. \mathbf{ds}_2 en la Fig. 2.4 barre un ángulo sólido siempre positivo, o siempre negativo, que se contabiliza una sola vez. Por otro lado, al recorrer la misma superficie desde los puntos restantes de V' , externos a S , e.g. \mathbf{r}'_1 , cada ángulo sólido ha de contabilizarse por partida doble, una vez con un signo y otra vez con signo contrario (e.g. al pasar por \mathbf{ds}_1 y $-\mathbf{ds}_1$ en la Fig. 2.4). De aquí sigue:

$$\begin{aligned} \oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{ds} &= \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{V'} \rho_\nu(\mathbf{r}') \oint_S d\Omega d\nu' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{V' - \Delta V} \rho_\nu(\mathbf{r}') \oint_S d\Omega d\nu' + \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{\Delta V} \rho_\nu(\mathbf{r}') \oint_S d\Omega d\nu' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{\Delta V} \rho_\nu(\mathbf{r}') \oint_S d\Omega d\nu' = \frac{Q}{\epsilon} \end{aligned} \quad (2.11)$$

donde Q es la carga encerrada por S , o, lo que es lo mismo, la contenida en ΔV : $Q = \int_{\Delta V} \rho_\nu(\mathbf{r}') d\nu'$.

La Ley de GAUSS se la puede obtener, también, a partir de la integración en un volumen de la Ec. (2.7) mediante la aplicación del teorema de la Divergencia

$$\begin{aligned} \int_V \nabla \cdot \mathbf{E} d\nu &= \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho_\nu d\nu \\ \oint_{S(V)} \mathbf{E} \cdot \mathbf{ds} &= \frac{Q}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

donde Q es la carga contenida en V . Por esta razón, la Ec. (2.7) se conoce como Ley de GAUSS *puntual* o *diferencial* y la Ec. (2.11) como Ley de GAUSS en *forma integral*.

2.3.1. Utilización de la Ley de GAUSS para la resolución del campo eléctrico

En algunos casos de elevada simetría de la distribución de cargas es posible resolver *fácilmente* el campo eléctrico usando la Ley de GAUSS en forma integral. Para ello es necesario poder inferir *a priori* la estructura del campo en un sistema de coordenadas en el cual dicha estructura quede plasmada de manera natural. Si, inferida la estructura del campo, resulta posible concebir una superficie cerrada especial S_G , de modo que el campo eléctrico sea en cierta porción de S_G normal y uniforme, y en el resto de S_G simplemente tangente, entonces la componente perpendicular E_\perp se podrá factorizar de la integral de flujo y se la podrá calcular

como la razón de la carga contenida en el interior de S_G al área de la porción de S_G normal al campo \mathbf{E} pesada por $\frac{1}{\epsilon_0}$:

$$E_{\perp} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{Q \text{ contenida en el interior de } S_G}{\text{área de la porción de } S_G \perp \mathbf{E}} \quad (2.12)$$

Ejemplo

Se desea calcular el campo eléctrico producido por la distribución de cargas $\rho_{\nu} = 2x^2$ [nC/m³].

Sol.: después de pensarlo un poco nos podemos convencer de que el campo eléctrico producido por esta distribución de cargas deberá tener la estructura $\mathbf{E} = E_x(x)\mathbf{a}_x$. Evidentemente, un cubo centrado en el origen y con sus caras paralelas a los planos coordenados, de aristas de longitud unitaria en las direcciones de los ejes y y z , y de arista que se extiende desde $-x$ a x en la dirección del eje x puede servir a nuestros propósitos para resolver $E_x(\pm x)$ según la Ec. (2.12) como

$$\begin{aligned} E_x(x) &= \frac{1}{\epsilon_0} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_0^x 2x^2 dx dy dz \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} \frac{2}{3} x^3 \text{ [nV/m]} \end{aligned}$$

de tal suerte que el campo eléctrico vale $\mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{2}{3} x^3 \mathbf{a}_x$ [nV/m].

2.4. Potencial electrostático

En virtud de las Ecuaciones (2.7) y (2.8), el campo electrostático se puede escribir como $\mathbf{E} = -\nabla V$, donde $V = V(\mathbf{r})$ es una función auxiliar o potencial que se conviene en llamar función potencial eléctrico, o simplemente potencial eléctrico. Esta función potencial, de acuerdo al teorema de Helmholtz, tiene la siguiente apariencia:

$$\begin{aligned} V(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \frac{\nabla' \cdot \mathbf{E}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\nu' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho_{\nu}(\mathbf{r}')}{R} d\nu' \end{aligned} \quad (2.13)$$

donde $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$.

¿Tiene el potencial eléctrico algún sentido físico?

Pues si. Para visualizar el sentido físico del potencial eléctrico, procederemos primero a calcular el potencial eléctrico producido por una carga puntual q . Un

carga puntual en \mathbf{r}' se puede representar como una distribución volumétrica de la forma: $\rho_\nu(\mathbf{r}') = q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$, que al sustituir en la Ec. (2.13) nos permite obtener:

$$\begin{aligned} V(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho_\nu(\mathbf{r}')}{R} dV' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Poniendo la carga q , por comodidad, más bien en el origen, la Ec. (2.14) da lugar a la expresión:

$$V(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \quad (2.15)$$

Esta carga puntual produce, como sabemos, un campo electrostático que viene dado por:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\nabla V \\ &= -\nabla \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \right) \\ &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{a}_r}{r^2} \end{aligned} \quad (2.16)$$

Procuremos ahora mover una segunda carga Q desde un punto \mathbf{r}_2 hasta un segundo punto \mathbf{r}_1 , con $r_2 > r_1$, asumiendo que la única fuerza a vencer sea la fuerza Coulombiana que produce el campo electrostático de q sobre Q . El trabajo W que hay realizar vale $W = \int_{r_2}^{r_1} \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\ell}$, donde $\mathbf{F} = -Q\mathbf{E}$, y \mathbf{E} es el campo dado por la Ec. (2.16). Este trabajo vale:

$$\begin{aligned} W &= -Q \int_{r_2}^{r_1} \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} \\ &= -Q \int_{r_2}^{r_1} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{a}_r}{r^2} \cdot (dr\mathbf{a}_r + r d\theta\mathbf{a}_\theta + r \sin\theta d\varphi\mathbf{a}_\varphi) \\ &= -\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_2}^{r_1} \frac{dr}{r^2} \\ &= \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \end{aligned} \quad (2.17)$$

Si en la Ecuación (2.17) la carga Q se traslada al primer miembro se obtiene:

$$\frac{W}{Q} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (2.18)$$

que es el trabajo por unidad de carga que es necesario realizar, en contra del campo eléctrico producido por q , para mover cualquier carga desde \mathbf{r}_2 hasta \mathbf{r}_1 . En particular, si el punto \mathbf{r}_2 se colocara en el infinito, la Ec. (2.18) asumiría la forma:

$$\frac{W}{Q} \Big|_{r_2=\infty} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_1} \quad (2.19)$$

Fácilmente se comprueba que –ver la Ec. (2.15)–:

$$\frac{W}{Q} \Big|_{r_2=\infty} = V(\mathbf{r}_1)$$

A la luz de lo anterior, el potencial eléctrico en un punto \mathbf{r} cualquiera del espacio se puede interpretar como el trabajo por unidad de carga que es necesario realizar en contra del campo eléctrico¹, para mover cualquier carga desde el infinito hasta \mathbf{r} . De esta forma, la Ec. (2.18) es la diferencia de los potenciales eléctricos en los puntos $\mathbf{r}_{1,2}$, o simplemente la diferencia de potencial entre tales puntos:

$$\begin{aligned} \frac{W}{Q} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \\ &= V(\mathbf{r}_1) - V(\mathbf{r}_2) \end{aligned}$$

De aquí sigue que:

$$- \int_{r_2}^{r_1} \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = V(\mathbf{r}_1) - V(\mathbf{r}_2) \quad (2.20)$$

Problema

Dado el campo electrostático $\mathbf{E} = K \frac{a\rho}{\rho}$, calcule el trabajo necesario para traer una carga Q hasta ρ desde el infinito si se sabe de antemano que el trabajo necesario para traer (desde el infinito también) una unidad de carga hasta ρ_0 , con $\rho < \rho_0$, vale 1 [C×V].

Resp.: $W = Q[K \ln(\rho_0/\rho) + 1]$.

2.5. Medios materiales inmersos en un campo electrostático

Hasta ahora hemos estudiado el campo electrostático producido por cargas eléctricas «suspendidas» en el vacío. Queremos a partir de este punto comprender y

¹En el caso de estudio el campo eléctrico considerado es producido por una carga puntual q , pero los resultados obtenidos bien valen para un campo eléctrico genérico producido por una distribución arbitraria de cargas.

caracterizar en términos tanto cualitativos como cuantitativos la interacción entre el campo electrostático y algunos tipos de medios materiales. Nos ocuparemos de revisar este asunto para dos tipos de materiales ampliamente usados en la ingeniería eléctrica: los conductores y los dieléctricos.

2.5.1. Conductores

En un medio conductor «perfecto», normalmente abreviado PEC –por su nombre en inglés *perfect electric conductor*–, la capa de conducción se encuentra idealmente conectada a la capa de valencia y los electrones de esta última capa, mediante una aportación de energía eléctrica externa nula, pueden «saltar» a la capa de conducción y moverse allí libremente, a lo largo y ancho del material. En un conductor real este salto entre capas lo realizan los electrones de valencia absorbiendo una pequeña cantidad de energía del campo eléctrico externo. Al estudiar varios materiales, en la medida en que la energía eléctrica externa necesaria para producir el salto de electrones de valencia a la capa de conducción se incrementa, tales medios deberán considerarse como peores conductores. Cuando la energía eléctrica externa requerida para producir el salto se hace infinita el material es un medio dieléctrico perfecto.

Ahora nos centraremos en describir cualitativamente los buenos conductores, los cuales asumiremos como ideales. En un conductor (ideal), sea que en él se depositen cargas libres en exceso desde el exterior (conductor cargado), o que, poseyendo una carga eléctrica nula (conductor descargado) se le exponga a un campo eléctrico externo, se cumple:

- Las cargas en exceso en el interior, o parte de sus propias cargas, se ponen en movimiento debido a la acción del propio campo, o del campo externo, respectivamente, y terminan distribuyéndose sobre la superficie. Una vez que ha cesado todo movimiento se dice que se ha alcanzado el equilibrio electrostático y el interior del conductor queda libre de cargas –en exceso–: $\rho_v = 0$.
- Alcanzado el equilibrio electrostático el campo eléctrico resultante en el interior es nulo ($\mathbf{E} = 0$) y por tanto el conductor presenta el mismo potencial en todos sus puntos.

Condiciones en la frontera entre un conductor y el vacío

Asumamos que cierto campo \mathbf{E}_0 actúa en el vacío –ver Fig. 2.5(a)– y que luego incorporamos cierto conductor neutro en el escenario. Esperamos que transcurra el

transitorio de redistribución de la carga en el conductor y que haya cesado todo movimiento.

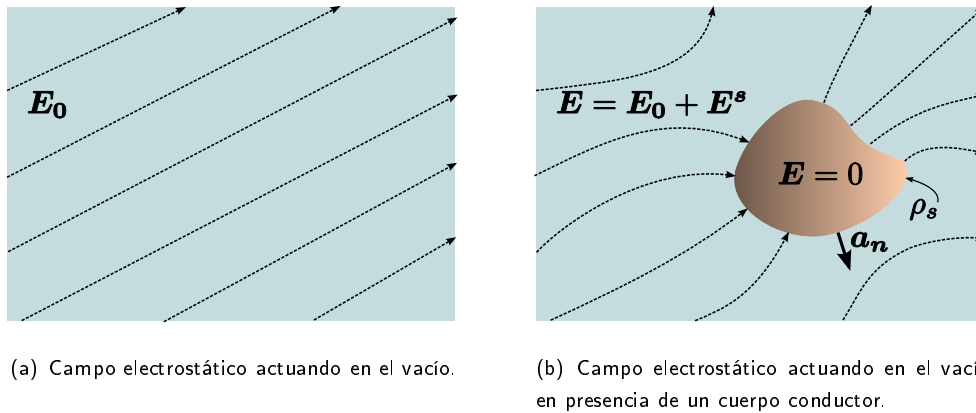


Figura 2.5: Interacción del campo electrostático \mathbf{E}_0 con un medio conductor.

En ese momento se habrá alcanzado el equilibrio electrostático y cierta carga aparecerá distribuida sobre la superficie del conductor en forma de una ρ_s . Esta ρ_s inducirá un campo \mathbf{E}^s que se superpondrá a \mathbf{E}_0 dando lugar a un campo \mathbf{E} resultante en el vacío y a un campo nulo en el interior del conductor –ver Fig. 2.5(b)–. En la superficie de separación entre el vacío y el conductor el campo electrostático está obligado a satisfacer las condiciones de borde que se derivan de las ecuaciones $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ y $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_s}{\epsilon_0}$. Tomando en cuenta que el campo en el interior del conductor es nulo será:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_n \times \mathbf{E} &= 0 \\ \mathbf{a}_n \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho_s}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

2.5.2. Dipolo eléctrico

Un **dipolo eléctrico** se puede definir a partir de un sistema de dos cargas de igual magnitud, pero de signo contrario, separadas una distancia $\delta\ell$ (ver Fig. 2.6), haciendo disminuir esta distancia en la medida que se hace crecer el valor las cargas de tal suerte que el producto $q\delta\ell$ se mantenga constante [6].

Esta idea abstracta se corresponde con la idea física de observar el par de cargas desde una distancia *muy grande* en comparación con la distancia $\delta\ell$, desde donde el sistema discreto tiene la apariencia de un sistema puntual en el cual el campo de una carga no anula, sin embargo, el campo de la otra.

El potencial en \mathbf{r} producido por el sistema de cargas que se muestra en la Fig. 2.6 vale :

$$V(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}' - \delta\boldsymbol{\ell}|} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \quad (2.21)$$

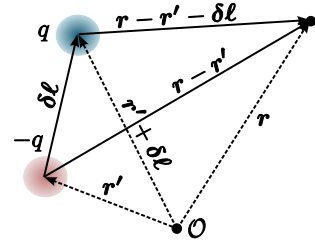


Figura 2.6: Dipolo eléctrico.

Expresando la distancia $|\mathbf{r} - \mathbf{r}' - \delta\boldsymbol{\ell}|$ como $|\mathbf{r} - \mathbf{r}' - \delta\boldsymbol{\ell}| = [|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 + \delta\ell^2 - 2(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \delta\boldsymbol{\ell}]^{\frac{1}{2}}$, y despreciando el término $\delta\ell^2$ en comparación con las cantidades $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2$ y $2(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \delta\boldsymbol{\ell}$, la raíz cuadrada se la puede resolver mediante la siguiente expansión binomial

$$\begin{aligned} |\mathbf{r} - \mathbf{r}' - \delta\boldsymbol{\ell}|^{-1} &\approx |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1} \left[1 - \frac{2(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \delta\boldsymbol{\ell}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \right]^{-\frac{1}{2}} \\ &\approx |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1} \left[1 + \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \delta\boldsymbol{\ell}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} + \dots \right] \end{aligned} \quad (2.22)$$

donde no se han incluido explícitamente los términos que contienen potencias iguales o mayores a dos de la distancia $\delta\ell$. Sustituyendo la Ec. (2.22) en la Ec. (2.21) y despreciando los términos que contienen potencias del tipo $\delta\ell^n$, con $n \geq 2$, se obtiene

$$V(\mathbf{r}) \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\delta\boldsymbol{\ell} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (2.23)$$

Si nos alejamos lo *suficiente* del sistema, como anunciábamos al principio, de tal suerte que $\delta\ell \rightarrow 0$, en cuyo caso toma sentido el haber despreciado los términos del tipo $\delta\ell^n$, con $n \geq 2$, en la Ec. (2.23), y que $q \rightarrow \infty$, y tal que el producto $q\delta\ell$ se mantenga constante, el sistema de la Fig. 2.6 *se convierte* en un dipolo eléctrico al cual se asocia un **momento dipolar eléctrico** \mathbf{p} definido como $\mathbf{p} = q\delta\boldsymbol{\ell}$ [C·m]. En este caso, la Ec. (2.21) se puede reescribir de la forma compacta

$$V(\mathbf{r}) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (2.24)$$

El campo eléctrico producido por un dipolo eléctrico se puede obtener por superposición y mediante la aplicación de aproximaciones similares a las contenidas en la expansión binomial de la Ec. (2.22)[6]:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}' - \delta\boldsymbol{\ell}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}' - \delta\boldsymbol{\ell}|^3} - \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) \\ &\approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^5} (\mathbf{r} - \mathbf{r}') - \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right] \end{aligned} \quad (2.25)$$

Para un dipolo ubicado en el origen, sobre el eje z , y orientado en la dirección de \mathbf{a}_z , las expresiones del potencial y del campo eléctrico dadas en las Ecs. (2.24) y (2.25), respectivamente, se especializan de la forma

$$V(\mathbf{r}) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{a}_r}{r^2}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} [(3\mathbf{p} \cdot \mathbf{a}_r)\mathbf{a}_r - \mathbf{p}]$$

las cuales, resolviendo los productos escalares, dan lugar a las siguientes expresiones aún más detalladas

$$V(\mathbf{r}) \approx \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos\theta}{r^2}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^3} [2\cos\theta\mathbf{a}_r + \sin\theta\mathbf{a}_\theta]$$

2.5.3. Interacción entre un dipolo eléctrico y un campo eléctrico uniforme externo

Al someter un dipolo eléctrico a la acción de un campo eléctrico externo \mathbf{E} , uniforme, sus cargas constitutivas experimentan una fuerza de igual magnitud pero de orientación opuesta. Por esta razón, el dipolo no se traslada. El dipolo, sin embargo, experimenta un torque \mathbf{T} , cuyo valor se puede calcular independientemente del punto de referencia. Tomando como punto de referencia la carga negativa del dipolo, se obtiene que este torque vale:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \delta\ell \times \mathbf{F} \\ &= \delta\ell \times q\mathbf{E} \\ &= \mathbf{p} \times \mathbf{E} \end{aligned} \tag{2.26}$$

Al utilizar la regla de la mano derecha, fácilmente se comprueba, a partir de la Ec. (5.28) que el torque tiende a alinear el dipolo con el campo eléctrico.

2.5.4. Dieléctricos

En los átomos de los materiales dieléctricos la última capa se encuentra bastante llena de electrones por lo que, a menos que éstos materiales sean expuestos a campos eléctricos muy intensos, el fenómeno de la conducción, así como se presenta en los conductores, no ocurre.

Desde el punto de vista eléctrico, los medios materiales dieléctricos se pueden pensar como constituidos de moléculas de dos tipos: las polares –2.7(a)– y las no

polares –2.7(b)–. En las del segundo tipo, los centros geométricos de la cargas negativa y positiva coinciden, y ante la acción de un campo eléctrico externo éstos se separan formando un pequeño dipolo eléctrico elemental que tiende a orientarse paralelamente al campo.

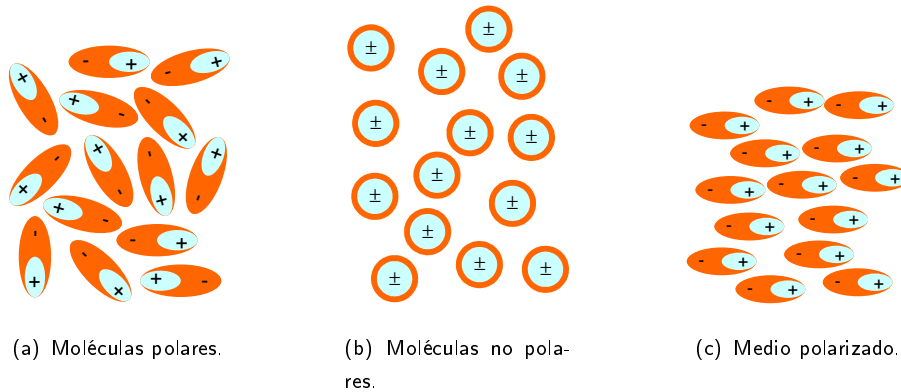


Figura 2.7: Polarización de un dieléctrico: aproximación macroscópica.

En los medios materiales constituidos por moléculas polares, ya éstas constituyen dipolos eléctricos elementales, pero orientados aleatoriamente –ver Fig. 2.7(a)– de tal forma que ningún efecto eléctrico promedio se puede medir de ellos. Ambas moléculas, ante la acción de un campo eléctrico externo, uniforme, experimentan un torque que las tiende a alinear con el campo eléctrico –ver Fig. 2.7(c)–.

Polarización

La reacción anteriormente descrita de las moléculas de un dieléctrico ante la acción de un campo eléctrico externo, o primario, se conoce como «polarización eléctrica». La polarización eléctrica se define formalmente mediante una cantidad macroscópica denominada vector de Polarización eléctrica \mathbf{P} . El vector de polarización eléctrica \mathbf{P} es una suerte de promedio volumétrico del momento dipolar y es una función de la posición dentro del medio material:

$$\mathbf{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum_n^N \mathbf{p}_n}{\Delta V} \quad (2.27)$$

donde N es el número de dipolos eléctricos elementales presentes en un volumen ΔV , \mathbf{p}_n es el momento dipolar asociado al dipolo n -ésimo y ΔV es un pequeño volumen incremental en cuyo centro se desea definir a \mathbf{P} .

Desde el punto de vista matemático, el límite de la Ec. (11.114) implica reducir el volumen incremental ΔV a dimensiones infinitesimales, pero desde el punto de

vista macroscópico, que es el escenario donde tiene sentido nuestro modelo, no se debe empujar este límite más allá de la continuidad de la materia.

Con base en la definición anterior, un diferencial de volumen –en el punto \mathbf{r}' – de un dieléctrico polarizado, en cuyo interior se encuentran millones y más moléculas polarizadas, tendrá asociado un momento dipolar promedio que vale: $d\mathbf{p}(\mathbf{r}') = \mathbf{P}(\mathbf{r}')d\nu'$, y produce en un punto \mathbf{r} de observación, un diferencial de potencial eléctrico que, de acuerdo con la Ec. 2.23, tiene la forma:

$$dV(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}')d\nu' \cdot \mathbf{a}_R}{R^2}$$

De esta forma, todo el dieléctrico produce un potencial eléctrico en r dado por la superposición de las infinitas contribuciones que hacen los infinitos dipolos promedios presentes en él que vale:

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{a}_R}{R^2} d\nu' \quad (2.28)$$

Cargas ligadas o de polarización

La Ecuación (2.28), tomando en cuenta que $\mathbf{a}_R/R^2 = -\nabla(1/R) = \nabla'(1/R)$, puede ser manipulada matemáticamente de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} V(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{a}_R}{R^2} d\nu' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \left(\frac{1}{R} \right) d\nu' \end{aligned}$$

y usando la propiedad: $\nabla \cdot (\mathbf{A}\varphi) = \varphi\nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla\varphi$:

$$\begin{aligned} V(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \nabla' \cdot \left[\frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}')}{R} \right] d\nu' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{-\nabla' \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}')}{R} d\nu' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{S'} \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}')}{R} \cdot d\mathbf{s}' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{-\nabla' \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}')}{R} d\nu' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{S'} \frac{\rho_{spol}(\mathbf{r}')}{R} ds' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho_{vpol}(\mathbf{r}')}{R} d\nu' \end{aligned}$$

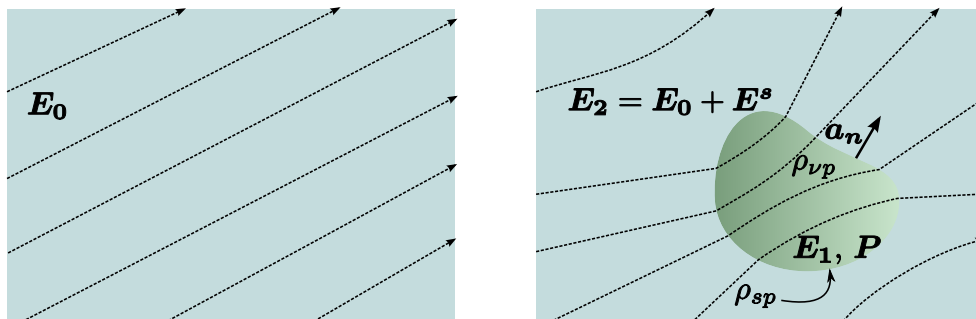
donde S' es la superficie exterior del dieléctrico, $\rho_{spol}(\mathbf{r}') = \mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{a}_n(\mathbf{r}')$ es una densidad superficial de cargas ligadas de polarización y $\rho_{vpol}(\mathbf{r}') = -\nabla' \cdot \mathbf{P}|_{\mathbf{r}'}$ es una densidad volumétrica de cargas ligadas de polarización.

Al introducir estas densidades de cargas ligadas, el cuerpo dieléctrico puede ser extraído del problema y ser sustituido por aquellas. De esta forma, el problema de obtener el potencial electrostático que el medio polarizado produce en el espacio es reconducido a la integración de las cargas de polarización, en lugar del propio

Vector de Polarización. En todo caso, el grado de dificultad del problema reconducido permanece inalterado respecto del original, porque el conocimiento de las densidades de cargas de polarización pasa por conocer el Vector de Polarización. Este procedimiento solo tiene valor didáctico, porque en un problema dado, estas densidades de cargas (o el Vector de Polarización) no pueden conocerse *a priori*, sino después de haber resuelto el campo eléctrico resultante. En este sentido, debemos tener presente que la polarización del dieléctrico se produce no solo por la acción de campo eléctrico primario, sino también por la acción del campo eléctrico que la polarización inducida va creando, el cual se superpone al primario, dando lugar a un campo eléctrico total que va produciendo más polarización, y que por tanto, la descripción que hemos hecho tiene sentido cuando se haya alcanzado el equilibrio electrostático.

Densidad de flujo y constante dieléctrica

Asumamos que cierto campo \mathbf{E}_0 actúa en el vacío –ver Fig. 2.8(a)– y que luego incorporamos cierto dieléctrico neutro en el escenario. Esperamos que transcurra el transitorio de acomodación de los dipolos elementales en el dieléctrico y que haya cesado todo movimiento.



(a) Campo electrostático actuando en el vacío.

(b) Campo electrostático actuando en el vacío en presencia de un cuerpo dieléctrico.

Figura 2.8: Interacción del campo electrostático \mathbf{E}_0 con un medio dieléctrico.

En ese momento se habrá alcanzado el equilibrio electrostático y el dieléctrico se habrá polarizado. La polarización del dieléctrico se podrá tratar mediante la incorporación en el problema de cierta carga distribuida sobre la superficie del dieléctrico, en forma de una $\rho_{sp} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{a}_n$, y, si el dieléctrico no fuese homogéneo, de cierta carga distribuida en el interior, en forma de una $\rho_{vp} = -\nabla \cdot \mathbf{P}$ –ver Fig. 2.8(b)–. Estas cargas de polarización inducirán un campo \mathbf{E}^s fuera y un campo \mathbf{E}^t dentro, los

cuales se superpondrán a \mathbf{E}_0 dando lugar al campo \mathbf{E}_2 en el vacío y al campo \mathbf{E}_1 en el interior del dieléctrico.

Condiciones en la frontera entre un dieléctrico y el vacío

En la superficie de separación entre el vacío y el dieléctrico el campo electrostático está obligado a satisfacer las condiciones de borde que se derivan de las ecuaciones $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ y $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_v}{\varepsilon_0}$. De esta forma tenemos:

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_n \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) &= 0 \\ \mathbf{a}_n \cdot (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) &= \frac{\rho_s}{\varepsilon_0}\end{aligned}$$

Vector de desplazamiento eléctrico o de densidad de flujo eléctrico

Si entre los intersticios microscópicos de un cuerpo dieléctrico infinito, no homogéneo, se lograrán introducir cargas libres en forma de una distribución estática, éstas producirían un campo eléctrico inicial que polarizaría el dieléctrico dando lugar a la aparición de cierta densidad volumétrica de cargas ligadas en él. Alcanzado el equilibrio electrostático, tanto las cargas libres introducidas inicialmente, como las inducidas de polarización, se constituirán en fuentes del campo eléctrico resultante. Por esta razón, al tomar la divergencia del campo eléctrico en el interior del dieléctrico será: $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}(\rho_v|_{\text{libres}} + \rho_{vpol})$. Tomando en cuenta que $\rho_{vpol} = -\nabla \cdot \mathbf{P}$, se podrá escribir

$$\nabla \cdot (\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho_v|_{\text{libres}}$$

Ahora bien, en el interior de ciertos dieléctricos, la polarización \mathbf{P} es directamente proporcional al campo eléctrico que se establece: $\mathbf{P} \propto \mathbf{E}$. En estos casos, la relación entre ambos vectores se puede expresar de la forma

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E} \quad (2.29)$$

donde χ_e , la cual es una cantidad adimensional, es un parámetro propio (intrínseco) de cada material denominado susceptibilidad eléctrica.

En la Teoría de Campos macroscópica en lugar de trabajar con el vector \mathbf{P} se suele emplear el vector de desplazamiento eléctrico, o de densidad de flujo eléctrico, \mathbf{D} , el cual se define como

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (2.30)$$

El vector \mathbf{D} tiene las mismas dimensiones que \mathbf{P} : $[\text{C}/\text{m}^2]$ y tiene una relación simple con \mathbf{E} en aquellos materiales en los que \mathbf{P} es proporcional a \mathbf{E} . En efecto, sustituyendo la Ec. (2.29) en la Ec. (2.30) se obtiene:

$$\begin{aligned}\mathbf{D} &= \varepsilon_0 \mathbf{E} + \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E} \\ &= \varepsilon_0 \underbrace{(1 + \chi_e)}_{\varepsilon_r} \mathbf{E} \\ &= \underbrace{\varepsilon_0 \varepsilon_r}_{\varepsilon} \mathbf{E} \\ \mathbf{D} &= \varepsilon \mathbf{E}\end{aligned}\tag{2.31}$$

donde ε_r es la **permitividad relativa** o **constante dieléctrica** del medio y es una cantidad adimensional, y $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$ es la **permitividad absoluta** o simplemente **permitividad** del medio y se mide en $[\text{F}/\text{m}]$.

Con base en la Ec. (2.31) podemos escribir:

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{D} &= (\nabla \varepsilon) \times \mathbf{E} \\ \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho_\nu\end{aligned}$$

donde ρ_ν solo comprende las cargas libres. Por esta razón, en la interfaz dieléctrico-vacío se cumple

$$\mathbf{a}_n \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = 0\tag{2.32}$$

Por otro lado, en medios genéricos la relación entre \mathbf{P} y \mathbf{E} , y por ende entre \mathbf{D} y \mathbf{E} , no es tan simple como $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$, donde ε es un parámetro constante. En efecto: **en los medios no lineales**, el parámetro ε es una función de la intensidad del campo: $\varepsilon = \varepsilon(E)$:

$$\mathbf{D} = \varepsilon(E) \mathbf{E}$$

en los medios no homogéneos, el parámetro ε varía con el punto $\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{r})$:

$$\mathbf{D} = \varepsilon(\mathbf{r}) \mathbf{E}$$

y en los medios anisotrópicos, ε es un tensor ya que \mathbf{P} , y por ende \mathbf{D} , no es paralelo al campo \mathbf{E} :

$$\begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$

En este curso, a menos que se especifique otra cosa, estaremos tratando con medios homogéneos, lineales e isotrópicos, los cuales se denominan medios simples. Los medios simples serán nuestros medios por defecto.

Problema

Dado un medio material caracterizado por

$$\overleftrightarrow{\varepsilon} = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1,6 & 0 \\ 0 & 0 & 1,8 \end{pmatrix}$$

en el que existe un campo eléctrico uniforme $\mathbf{E} = 2\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y - 5\mathbf{a}_z$ [V/m], calcule:

(a) el tensor de susceptibilidad eléctrica $\overleftrightarrow{\chi}_e$, (b) el vector de polarización \mathbf{P} , (c) el momento dipolar promedio en la dirección de \mathbf{a}_z en un 1 cm^3 de material, y (d) el vector de desplazamiento eléctrico \mathbf{D} .

Resp.: (a) Como $\overleftrightarrow{\chi}_e = \overleftrightarrow{\varepsilon}_r - \mathbf{I}$, será:

$$\overleftrightarrow{\chi}_e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0 & 0,8 \end{pmatrix}$$

(b) $\mathbf{P} = \varepsilon_0(0,6\mathbf{a}_y - 4\mathbf{a}_z)$ [C/m²], (c) $\Delta\mathbf{p} = -4 \times 10^{-6}\varepsilon_0\mathbf{a}_z$ [C×m], (d) $\mathbf{D} = \varepsilon_0(2\mathbf{a}_x + 1,6\mathbf{a}_y - 9\mathbf{a}_z)$ [C/m²].

2.6. Energía electrostática

Al *conformar* una distribución de cargas se debe «gastar» cierta energía que, luego, mientras perdura la distribución, queda almacenada en el campo eléctrico de la distribución en forma de **energía electrostática**. Se puede admitir que la energía se ha consumido (transformado) en la creación del campo (que la almacena). En un medio lineal, una expresión analítica de la energía electrostática, almacenada por un sistema de cargas discretas, se puede obtener sumando el trabajo individual requerido para poner cada una de las cargas en su lugar dentro de la distribución, trayéndolas desde el infinito una por una. En efecto, despreciando el trabajo original realizado en la «fabricación» de cada carga, al traer la primera carga a su posición virtualmente no es necesario realizar ningún trabajo. Al traer la segunda carga realizaremos un trabajo par a q_2V_{21} , donde V_{21} es el potencial producido por la carga 1 en el punto ocupado por la carga 2. Al traer q_3 realizaremos un trabajo par a $q_3(V_{31} + V_{32})$, donde $V_{31} + V_{32}$ es el potencial producido por las cargas 1 y 2 en el punto ocupado por q_3 . Así, sucesivamente, tocará finalmente traer la carga última N -ésima, realizando un trabajo par a $q_N \sum_{n=1}^{N-1} V_{Nn} = q_NV_N$, donde $V_N =$

$\sum_{n=1}^{N-1} V_{Nn}$ es el potencial producido por el resto de las cargas en el punto ocupado por q_N . La repetición del experimento anterior en orden inverso nos permite calcular nuevamente el mismo trabajo, cuya suma $2W_e$ resulta par a $2W_e = \sum_n^N q_n V_n$, de donde se desprende que

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_n^N q_n V_n \text{ [J]}$$

donde V_n es el potencial en el punto ocupado por la carga q_n debido a las $N - 1$ cargas restantes de la distribución.

Cuadro 2.2: Energía electrostática acumulada por una distribución de cargas. V_n debe leerse como el potencial en el punto ocupado por la carga q_n debido a las $N - 1$ cargas restantes de la distribución. V se debe interpretar de manera análoga.

DISTRIBUCIÓN	ENERGÍA ALMACENADA Y DENSIDAD DE ENERGÍA
<i>N</i> cargas puntuales	$W_e = \frac{1}{2} \sum_n^N q_n V_n \text{ [J]}$
Distribución volumétrica de cargas	$W_e = \frac{1}{2} \int_V \rho_\nu(\mathbf{r}) V(\mathbf{r}) d\nu \text{ [J]}$ $W_e = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{D}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) d\nu \text{ [J]}$
Densidad de energía eléctrica	$\omega_e = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \text{ [J/m}^3\text{]}$

Una generalización de este resultado al caso de una distribución continua de cargas se obtiene usando cargas infinitesimalmente pequeñas $q_n \rightsquigarrow \rho_\nu d\nu$, trayendo un infinito número de éstas y juntándolas de forma continua en cierto volumen. Sobre cada una de estas cargas será necesario efectuar un trabajo infinitesimal del orden de $\rho_\nu V d\nu$. La suma de estos trabajos se convierte en una suma continua $\sum \rightsquigarrow \int_V$. En el cuadro 2.2 se indican las expresiones analíticas de la energía eléctrica almacenada en el campo eléctrico de varias distribuciones de cargas. Una expresión equivalente de la W_e se obtiene expandiendo el volumen de integración infinitamente

($V \rightsquigarrow V_\infty$) y valiéndonos de la relación $\rho_\nu = \nabla \cdot \mathbf{D}$, de la siguiente manera:

$$W_e = \frac{1}{2} \int_{V_\infty} \rho_\nu V \, d\nu = \frac{1}{2} \int_{V_\infty} (\nabla \cdot \mathbf{D}) V \, d\nu$$

usando la identidad vectorial $\nabla \cdot (V\mathbf{D}) = V\nabla \cdot \mathbf{D} + \mathbf{D} \cdot \nabla V$ y el Teorema de la Divergencia

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{V_\infty} (\nabla \cdot \mathbf{D}) V \, d\nu &= \frac{1}{2} \int_{V_\infty} \nabla \cdot (V\mathbf{D}) \, d\nu - \frac{1}{2} \int_{V_\infty} \mathbf{D} \cdot \nabla V \, d\nu \\ &= \frac{1}{2} \int_{S_\infty} V\mathbf{D} \cdot \mathbf{a}_n \, ds + \frac{1}{2} \int_{V_\infty} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \, d\nu \end{aligned}$$

y tomando en cuenta que $V \propto \frac{1}{R}$, $\mathbf{D} \propto \frac{1}{R^2}$ y $ds \propto R^2$: $\frac{1}{2} \int_{S_\infty} V\mathbf{D} \cdot \mathbf{a}_n \, ds \rightarrow 0$, sigue que:

$$\begin{aligned} W_e &= \frac{1}{2} \int_{V_\infty} \rho_\nu V \, d\nu \\ &= \frac{1}{2} \int_{V_\infty} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \, d\nu \end{aligned} \quad (2.33)$$

La cantidad subintegral $\frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}$ tiene dimensiones de $[\text{J}/\text{m}^3]$ y constituye la densidad de energía (eléctrica) ω_e del campo eléctrico.

2.6.1. Capacitancia

Cuando se fuerza una diferencia de potencial entre dos cuerpos conductores, originalmente neutros, necesariamente se produce una redistribución de cargas eléctricas a expensas de cierto consumo de energía externa (eventualmente química, aportada por una batería, por ejemplo).

Las cargas movilizadas, alcanzado el equilibrio electrostático, terminan distribuidas preponderantemente sobre las superficies «enfrentadas» de los conductores creando un campo \mathbf{E} que almacena, en forma de energía electrostática, el correspondiente trabajo realizado. En este sentido, un sistema de dos conductores es capaz de «almacenar energía». La cantidad de energía electrostática almacenada es, en general, una función de la geometría del sistema y del medio dieléctrico de relleno. Una medida de la capacidad de almacenamiento de energía eléctrica de un sistema como éste bien podría ser la razón de carga distribuida (ΔQ) a trabajo realizado por unidad de carga (ΔV):

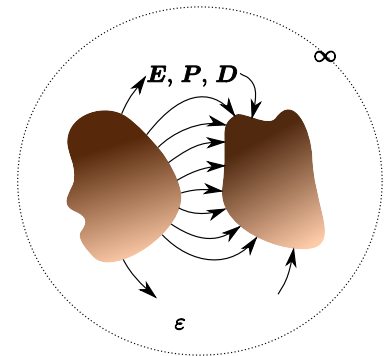


Figura 2.9: Sistema de dos conductores inmersos en un medio dieléctrico al cual se le puede atribuir una Capacitancia.

$$C = \frac{\Delta Q}{\Delta V} = \frac{\oint_S \epsilon \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}}{-\int_-^+ \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell}} \quad (2.34)$$

C recibe el nombre de capacitancia y es un parámetro geométrico del sistema ampliamente utilizado en la Teoría de Circuitos. De esta suerte, al comparar dos de estos sistemas, distintos entre si, forzando cierta ΔV entre sus dos cuerpos conductores componentes, almacenará mayor energía aquél donde las cargas redistribuidas sobre la superficie sea mayor.

Problema

Calcule la capacitancia por unidad de longitud de un sistema constituido por dos cilindros conductores concéntricos si el espacio entre ambos conductores está ocupado por dos dieléctricos como se ilustra en la Fig. 2.10 (No proceda postulando que $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$).

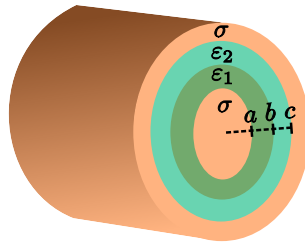


Figura 2.10: Corte transversal del sistema bajo estudio del problema.

Resp.: $\frac{C}{\Delta \ell} = \frac{2\pi}{\frac{\ln(c/b)}{\epsilon_2} + \frac{\ln(b/a)}{\epsilon_1}}$ [F/m].

2.7. Problemas propuestos

1. Una línea de carga de longitud L finita tiene una densidad de carga lineal ρ_L [C/m] uniforme. Suponiendo la línea yacente sobre el eje x , calcule:
 - a) El potencial V en el plano que divide en dos partes iguales la línea de carga.
 - b) El campo electrostático \mathbf{E} directamente a partir de ρ_L (integrando).
2. Una distribución de carga lineal ρ_L [C/m] uniforme tiene forma circular con radio a [m]. Calcule:

- a) El potencial V en los puntos sobre la línea central y perpendicular a la distribución.
- b) El campo electrostático \mathbf{E} directamente a partir de ρ_L (integrando).
3. Demuestre que en la superficie interior de un conductor hueco no se depositan cargas a menos que existan cargas libres en la cavidad.
4. Dado el sistema de conductores que se muestra en la Fig. 2.11, el cual consiste en tres cilindros conductores concéntricos e infinitos: un cilindro interno macizo de radio a , un cilindro intermedio hueco de radio interior b y exterior c , y un cilindro externo, también hueco, de radios interior y exterior, d y e , respectivamente, resuelva las densidades de cargas libres ($\rho_s|_{libres}$) y de polarización (ρ_{spol}) en $\rho = a, b, c, d, e$, una vez alcanzado el equilibrio electrostático, si se depositan en exceso Q_0 [C] por unidad de longitud en:
- a) el cilindro interno, si el resto de los conductores se mantienen eléctricamente neutros.
- b) el cilindro intermedio, si el resto de los conductores se mantienen eléctricamente neutros.
- c) el cilindro externo, si el resto de los conductores se mantienen eléctricamente neutros.

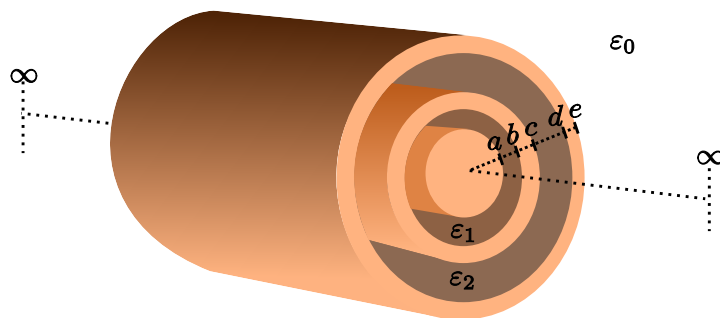


Figura 2.11: Vista del sistema de conductores cilíndricos concéntricos del Problema 3. En la región $a < \rho < b$: $\varepsilon_1 = \varepsilon_0 e^{-\frac{\rho-a}{b-a}}$ y en la región $c < \rho < d$: $\varepsilon_2 = 10\varepsilon_0$.

5. Dada una distribución volumétrica de cargas libres $\rho_v = \rho^2$ [C/m³] (ρ en m), determine:
- a) El campo electrostático en todos los puntos del espacio.

- b) La energía electrostática por unidad de volumen en el espacio.
- c) Si el espacio se supone ocupado por un medio de permitividad ε , calcule ρ_{vp} .
6. Dada una distribución volumétrica de cargas libres $\rho_v = \rho_0 r$ [C/m³], determine:
- a) El campo electrostático en todos los puntos del espacio.
- b) La energía electrostática por unidad de volumen en el espacio.
- c) Si el espacio se supone ocupado por un medio de permitividad ε , calcule ρ_{vp} .

Capítulo 3

Problemas con Valores en la Frontera

Introducción

HASTA ahora habíamos resuelto problemas de electrostática en los que se especificaba explícitamente la distribución de cargas en forma de una $\rho_\nu(\mathbf{r}')$ y mediante un procedimiento de integración se calculaba el potencial eléctrico $V(\mathbf{r})$ (ver figura 3.1):

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{V'} \frac{\rho_\nu(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$

Existe, sin embargo, un conjunto de otros problemas en electrostática denominados problemas con valores en la frontera, los cuales consisten, definida cierta región R , delimitada por cierta frontera ∂R , en encontrar una función potencial $V = V(\mathbf{r})$ que satisfaga en R , o la Ecuación de LAPLACE: $\nabla^2 V = 0$, o la Ecuación de POISSON: $\nabla^2 V = -\frac{\rho_\nu}{\epsilon}$, y que satisfaga, a su vez, ciertas condiciones dadas en ∂R .

En los problemas con valores en la frontera la región R consiste, en general, de un dieléctrico simple, y la frontera ∂R está conformada por las superficies exteriores de dos o más conductores inmersos en el dieléctrico. En la Figura

3.2(a) la zona en blanco, donde se ha escrito la ecuación de LAPLACE, constituye la región R de interés, y las superficies $S_{1,2}$ exteriores de los dos cuerpos conductores

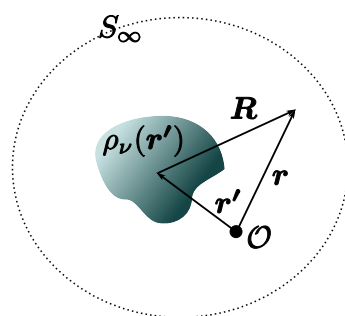
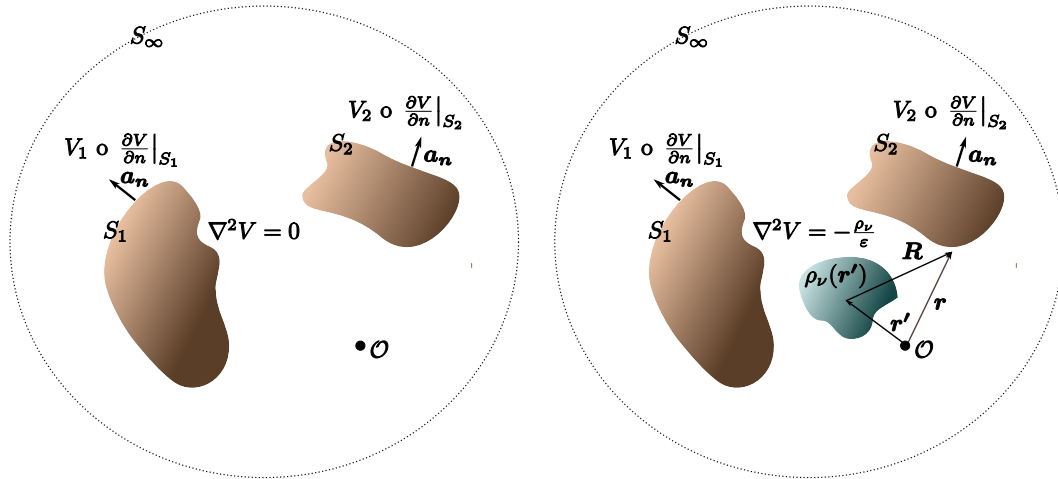


Figura 3.1: Distribución de cargas en un espacio ilimitado.



(a) Región R delimitada por las superficies $S_{1,2}$ y el infinito (δR). (b) Región R con una distribución de cargas presente.

Figura 3.2: Problemas con valores en la frontera.

presentes, constituyen la frontera ∂R de R . En la Figura 3.2(b) se ha recreado el mismo escenario y se ha añadido una distribución de cargas libres según una ley $\rho_\nu = \rho_\nu(\mathbf{r}')$ creando un nuevo problema con valores en la frontera, que viene a ser la superposición de los problemas representados por las figuras 3.1 y 3.2(a). Si se conviene en denominar $V_H(\mathbf{r})$ la solución del problema con valores en la frontera de la Fig. 3.2(a), y $V_P(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{V'} \frac{\rho_\nu(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$ la solución del problema de la figura 3.1, la solución del problema de la Figura 3.2(b) será:

$$\begin{aligned} V(\mathbf{r}) &= V_H(\mathbf{r}) + V_P(\mathbf{r}) \\ &= V_H(\mathbf{r}) + \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{V'} \frac{\rho_\nu(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \end{aligned} \quad (3.1)$$

En los problemas con valores en la frontera, en general, existen ciertas distribuciones de cargas sobre $S_{1,2}$, las cuales suelen llamarse «externas», porque no se encuentran en el interior de R , que no se conocen explícitamente y que por tanto no pueden integrarse, pero que se especifican indirectamente mediante las denominadas condiciones de borde.

Los problemas con valores en la frontera pueden ser de uno de los tipos siguientes:

- De DIRICHLET o del primer tipo, en el que en la frontera se especifica el valor de V :

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 V &= 0 \\ V|_{S_{1,2}} &= V_{1,2} \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

- De NEUMANN o del segundo tipo, en el que en la frontera se especifica el valor de la derivada direccional de V respecto de la normal a la frontera:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 V &= 0 \\ \frac{\partial V}{\partial n} \Big|_{S_{1,2}} &= \frac{\partial V}{\partial n} \Big|_{1,2} \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

- Mixto, en el que en parte de la frontera se especifica el valor de V , y en el resto el de la derivada direccional de V respecto de la normal a la frontera:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 V &= 0 \\ V|_{S_1} &= V_1 \\ \frac{\partial V}{\partial n} \Big|_{S_2} &= \frac{\partial V}{\partial n} \Big|_2 \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

La solución de los problemas del tipo esquematizado en la figura 3.2(a) se reduce a resolver la ecuación de LAPLACE, lo cual será posible analítica o numéricamente según sea la geometría de R . Si la geometría de R es una geometría canónica, la solución del problema se podrá hallar usando métodos analíticos. Si la geometría fuera arbitraria, sin simetría alguna, se deberá estimar $V(\mathbf{r})$ utilizando métodos numéricos. A los fines académicos tiene sentido revisar, por ahora, solo aquellos problemas con solución analítica posible.

3.1. Teorema de la Unicidad

El Teorema de la Unicidad establece que dos soluciones de la ecuación de LAPLACE (o de POISSON) que satisfacen las mismas condiciones en la frontera son idénticas si se trata de un problema de contorno de DIRICHLET o mixto, o difieren a lo sumo en una constante aditiva si se trata de un problema de contorno de NEUMANN [4, 5, 6]. Para demostrar este teorema supóngase que se dispone de dos soluciones de la ecuación de LAPLACE (o de POISSON): $\phi_1 = \phi_1(\mathbf{r})$ y $\phi_2 = \phi_2(\mathbf{r})$:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi_1 &= 0 \\ \nabla^2 \phi_2 &= 0 \end{aligned}$$

o:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi_1 &= -\frac{\rho_\nu}{\varepsilon} \\ \nabla^2 \phi_2 &= -\frac{\rho_\nu}{\varepsilon} \end{aligned}$$

tales que las mismas satisfacen ciertas condiciones de borde. Estas condiciones de contorno pueden ser del primer tipo (problema de DIRICHLET):

$$\phi_1|_{S_{1,2}} = V_{1,2} \quad (3.5)$$

$$\phi_2|_{S_{1,2}} = V_{1,2} \quad (3.6)$$

del segundo tipo (problema de NEUMANN):

$$\left. \frac{\partial \phi_1}{\partial n} \right|_{S_{1,2}} = \left. \frac{\partial V}{\partial n} \right|_{S_{1,2}} \quad (3.7)$$

$$\left. \frac{\partial \phi_2}{\partial n} \right|_{S_{1,2}} = \left. \frac{\partial V}{\partial n} \right|_{S_{1,2}} \quad (3.8)$$

o mixtas.

Se define una nueva función $\Phi = \Phi(\mathbf{r})$ dada por: $\Phi(\mathbf{r}) = \phi_1(\mathbf{r}) - \phi_2(\mathbf{r})$. Fácilmente se comprueba que la nueva función satisface la ecuación de LAPLACE (ya no la de POISSON):

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Phi &= \nabla^2 (\phi_1 - \phi_2) \\ &= \nabla^2 \phi_1 - \nabla^2 \phi_2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Si se toma el gradiente de la función Φ y se multiplica por la propia función Φ se comprueba, aplicando el Teorema de la Divergencia, que la integral de la divergencia de la función producto resultante, $\nabla \cdot (\Phi \nabla \Phi)$, en la región R del problema es nula:

$$\begin{aligned} \int_R \nabla \cdot (\Phi \nabla \Phi) \, d\nu &= \int_{S_{1,2}} \Phi \nabla \Phi \cdot d\mathbf{s} \mathbf{a}_n \\ &= \int_{S_{1,2}} \Phi (\nabla \Phi \cdot \mathbf{a}_n) \, ds \\ &= \int_{S_{1,2}} \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} \, ds \\ &= \int_{S_{1,2}} (\phi_1|_{S_{1,2}} - \phi_2|_{S_{1,2}}) \left(\left. \frac{\partial \phi_1}{\partial n} \right|_{S_{1,2}} - \left. \frac{\partial \phi_2}{\partial n} \right|_{S_{1,2}} \right) \, ds \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

La divergencia $\nabla \cdot (\Phi \nabla \Phi)$ puede, además, expandirse en la suma de dos términos:

$$\nabla \cdot (\Phi \nabla \Phi) = \Phi \nabla^2 \Phi + (\nabla \Phi)^2$$

pero como $\nabla^2 \Phi = 0$ sigue, tomando en cuenta la ecuación 3.9, que:

$$\int_R (\nabla \Phi)^2 \, d\nu = 0$$

resultado que solo puede ser posible si $\nabla\Phi = 0$ en todos los puntos de R , lo cual implica, a su vez, que Φ sea constante en R , e inclusive sobre la frontera $S_{1,2}$. Que Φ sea constante en $R + S_{1,2}$, y llamando k esta constante, significa que $\phi_1 - \phi_2 = k$.

En un problema de DIRICHLET o mixto el valor de esta constante se puede determinar evaluando esta diferencia en algún punto donde se conozcan de antemano los valores $\phi_{1,2}$. Este punto puede ser uno cualquiera sobre la frontera y fácilmente se comprueba que k es nula, resultando idénticas las funciones $\phi_{1,2}$: $\phi_1 = \phi_2$.

En un problema de NEUMANN resulta obvio, después de derivar:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n}\Big|_{S_{1,2}} = \frac{\partial k}{\partial n}$$

$$\frac{\partial\phi_1}{\partial n}\Big|_{S_{1,2}} - \frac{\partial\phi_2}{\partial n}\Big|_{S_{1,2}} = 0$$

que la diferencia entre las dos soluciones de la Ecuación de LAPLACE $\phi_{1,2}$ es precisamente una constante aditiva, k , indeterminada.

3.2. Problemas con valores en la frontera en una dimensión

Existen en su totalidad 5 diferentes problemas con valores en la frontera en una dimensión tomando como referencia los sistemas de coordenadas Cartesianas, cilíndricas y esféricas. En la Fig. 3.3 se muestran las distintas geometrías de los conductores que dan lugar a los problemas con valores en la frontera en 1D en los sistemas de coordenadas mencionadas.

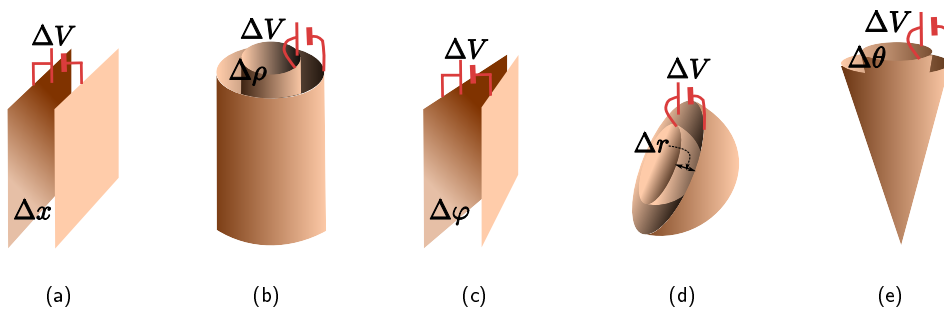


Figura 3.3: Geometrías de los conductores que dan lugar a los problemas con valores en la frontera en 1D en los sistemas de coordenadas Cartesianas, cilíndricas y esféricas.

En el Cuadro 3.1 se muestran las ecuaciones de LAPLACE específicas, y sus

correspondientes soluciones, de cada una de las geometrías presentadas en la Fig. 3.3 [4, 6].

Cuadro 3.1: Ecuaciones de LAPLACE específicas de cada una de las geometrías presentadas en la Fig. 3.3 y sus correspondientes soluciones.

Geometría del problema	Ecuación de LAPLACE	Solución
Fig. 3.3(a)	$\frac{d^2V}{dx^2} = 0$	$V(x) = Ax + B$
Fig. 3.3(b)	$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dV}{d\rho} \right) = 0$	$V(\rho) = A \ln \rho + B$
Fig. 3.3(c)	$\frac{1}{\rho^2} \frac{d^2V}{d\varphi^2} = 0$	$V(\varphi) = A\varphi + B$
Fig. 3.3(d)	$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dV}{dr} \right) = 0$	$V(r) = -\frac{A}{r} + B$
Fig. 3.3(e)	$\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dV}{d\theta} \right) = 0$	$V(\theta) = A \ln \left(\tan \frac{\theta}{2} \right) + B$

Las constantes indeterminadas A y B que aparecen en las soluciones que se muestran en la tercera columna del Cuadro 3.1 se han de resolver evaluando tales soluciones en la frontera para los problemas de contorno de DIRICHLET y mixto. En el problema de contorno de NEUMANN la constante B no se podrá resolver. Esta limitación no impide, sin embargo, el cálculo del campo eléctrico como $\mathbf{E} = -\nabla V$ en este tipo de problema.

Ejercicio

Se desea calcular la capacitancia del sistema que se muestra en la figura 3.4. Dicho sistema consiste de dos esferas conductoras concéntricas rellenas con dos dieléctricos homogéneos distintos.

El cálculo de C se efectuará suponiendo conocida la diferencia de potencial ΔV entre los conductores, y hallando la carga Q acumulada en el conductor a mayor potencial como una función de ΔV : $Q = Q(\Delta V)$:

$$C = \frac{Q(\Delta V)}{\Delta V}$$

Para ello se hace necesario el planteamiento de dos problemas con valores en la

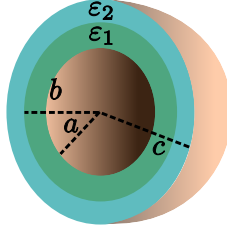


Figura 3.4: Corte transversal del sistema bajo estudio, el cual consiste en dos esferas conductoras concéntricas de radios a y c , respectivamente, cuyo interior se ha llenado con dos materiales de constantes dieléctricas $\varepsilon_{1,2}$.

frontera, a partir de la fijación de la diferencia de potencial ΔV entre los conductores, y estableciendo apropiadas condiciones de borde.

Los problemas con valores en la frontera han de ser:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dV_1}{dr} \right) &= 0 \\ V_1(a) &= \Delta V \end{aligned} \right\}, \quad a < r < b \quad (3.10)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dV_2}{dr} \right) &= 0 \\ V_2(c) &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad b < r < c \quad (3.11)$$

Las soluciones de estos problemas son, respectivamente:

$$V_1(r) = -\frac{A}{r} + B, \quad a < r < b \quad (3.12)$$

$$V_2(r) = -\frac{C}{r} + D, \quad b < r < c \quad (3.13)$$

Vemos que al tener cuatro constantes indeterminadas las condiciones de frontera establecidas no son suficientes: hacen falta dos condiciones de borde adicionales. Estas condiciones de borde han de ser añadidas por nosotros a la luz del comportamiento de $V_{1,2}(r)$ y de $\frac{\partial V_{1,2}}{\partial r}$ en la frontera entre los dos dieléctricos, a saber:

$$V_1(b) = V_2(b) \quad (3.14)$$

$$\left. \frac{\partial V_1}{\partial r} \right|_{r=b} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \left. \frac{\partial V_2}{\partial r} \right|_{r=b} \quad (3.15)$$

juntando las condiciones de frontera establecidas en las ecuaciones (3.10) y (3.11)

con las definidas mediante las ecuaciones (3.14) y (3.15), se puede escribir:

$$\begin{aligned}\Delta V &= -\frac{A}{a} + B \\ 0 &= -\frac{C}{c} + D \\ -\frac{A}{b} + B &= -\frac{C}{b} + D \\ A &= \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} C\end{aligned}$$

de donde:

$$\begin{aligned}A &= \frac{\Delta V}{\left[\frac{1}{\kappa c} - \frac{1}{\kappa b} + \frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right]} \\ B &= \Delta V - \frac{\Delta V}{\left[\frac{1}{\kappa c} - \frac{1}{\kappa b} + \frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right]} \frac{1}{a} \\ C &= \frac{\Delta V}{\kappa \left[\frac{1}{\kappa c} - \frac{1}{\kappa b} + \frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right]} \\ D &= \frac{\Delta V}{\kappa \left[\frac{1}{\kappa c} - \frac{1}{\kappa b} + \frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right]} \frac{1}{c}\end{aligned}$$

donde $\kappa = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$.

De esta forma tenemos:

$$\begin{aligned}V(r) &= \Delta V - \frac{\Delta V}{\left[\frac{1}{\kappa c} - \frac{1}{\kappa b} + \frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right]} \frac{1}{a} - \frac{\Delta V}{\left[\frac{1}{\kappa c} - \frac{1}{\kappa b} + \frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right]} \frac{1}{r}, \quad \forall r/a \leq r \leq b \\ V(r) &= \frac{\Delta V}{\kappa \left[\frac{1}{\kappa c} - \frac{1}{\kappa b} + \frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right]} \frac{1}{c} - \frac{\Delta V}{\kappa \left[\frac{1}{\kappa c} - \frac{1}{\kappa b} + \frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right]} \frac{1}{r}, \quad \forall r/b \leq r \leq c\end{aligned}$$

El campo eléctrico \mathbf{E} se puede calcular como $\mathbf{E} = -\nabla V = -\frac{dV}{dr} \mathbf{a}_r$:

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \frac{\Delta V}{\left[\frac{1}{\kappa c} - \frac{1}{\kappa b} + \frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right]} \frac{\mathbf{a}_r}{r^2} \quad \forall r/a \leq r \leq b \\ \mathbf{E} &= \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \frac{\Delta V}{\left[\frac{1}{\kappa c} - \frac{1}{\kappa b} + \frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right]} \frac{\mathbf{a}_r}{r^2} \quad \forall r/b \leq r \leq c\end{aligned}$$

Utilizando el campo \mathbf{D} la carga Q se puede calcular mediante la integral $Q = \int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s}$, tomando S de tal forma que contenga la esfera conductora interior:

$$\begin{aligned}Q &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \varepsilon_1 \frac{\Delta V}{\left[\frac{1}{\kappa c} - \frac{1}{\kappa b} + \frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right]} \frac{\mathbf{a}_r}{r^2} \cdot r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \mathbf{a}_r \\ &= \frac{\Delta V}{\left[\frac{1}{\kappa c} - \frac{1}{\kappa b} + \frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right]} \varepsilon_1 4\pi\end{aligned}$$

y finalmente se obtiene:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{4\pi\epsilon_1}{\left[\frac{1}{\kappa c} - \frac{1}{\kappa b} + \frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right]}$$

Fácilmente se comprueba que la capacitancia del sistema de la figura 3.4 se puede pensar como la capacitancia equivalente de dos sistemas esféricos en serie, cada uno con capacitancias asociadas de $C_1 = 4\pi\epsilon_1/(1/b - 1/a)$ y $C_2 = 4\pi\epsilon_2/(1/c - 1/b)$:

$$\begin{aligned} C &= C_1 \parallel C_2 \\ &= \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} \\ &= \frac{1}{\frac{(\frac{1}{b} - \frac{1}{a})}{4\pi\epsilon_1} + \frac{(\frac{1}{c} - \frac{1}{b})}{4\pi\epsilon_2}} \\ &= \frac{4\pi\epsilon_1}{\left[\frac{1}{\kappa c} - \frac{1}{\kappa b} + \frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right]} \end{aligned}$$

3.3. Problemas con valores en la frontera en dominios rectangulares 2D

En coordenadas Cartesianas existe un problema con valores en la frontera general que engloba cuatro problemas particulares distintos pero muy parecidos entre sí. El problema general se ilustra en la figura 3.5.

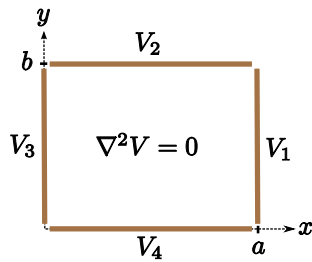


Figura 3.5: Dominio rectangular.

En dicha figura se muestra una región rectangular definida por $0 < x < a$ y $0 < y < b$. En la misma figura se identifican cuatro fronteras en las que la función V asume valores distintos: $V(a, y) = V_1$, $y \in]0, b[$, $V(x, b) = V_2$, $x \in]0, a[$, $V(0, y) = V_3$, $y \in]0, b[$ y $V(x, 0) = V_4$, $x \in]0, a[$.

El problema con valores en la frontera resultante tiene la forma:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 V &= 0 \\ V(a, y) &= V_1 \quad V(x, b) = V_2 \\ V(0, y) &= V_3 \quad V(x, 0) = V_4 \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

El problema definido por la ecuación (3.16) se puede pensar como la superposi-

ción de los siguientes 4 problemas menos generales –ver figura 3.6–:

$$\left. \begin{array}{l} \nabla^2 V = 0 \\ V(a, y) = V_1 \quad V(x, b) = V_2 \\ V(0, y) = V_3 \quad V(x, 0) = V_4 \end{array} \right\} =$$

$$\left. \begin{array}{l} \nabla^2 V = 0 \\ V(a, y) = V_1 \quad V(x, b) = 0 \\ V(0, y) = 0 \quad V(x, 0) = 0 \end{array} \right\} + \left. \begin{array}{l} \nabla^2 V = 0 \\ V(a, y) = 0 \quad V(x, b) = V_2 \\ V(0, y) = 0 \quad V(x, 0) = 0 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \nabla^2 V = 0 \\ V(a, y) = 0 \quad V(x, b) = 0 \\ V(0, y) = V_3 \quad V(x, 0) = 0 \end{array} \right\} + \left. \begin{array}{l} \nabla^2 V = 0 \\ V(a, y) = 0 \quad V(x, b) = 0 \\ V(0, y) = 0 \quad V(x, 0) = V_4 \end{array} \right\} \quad (3.17)$$

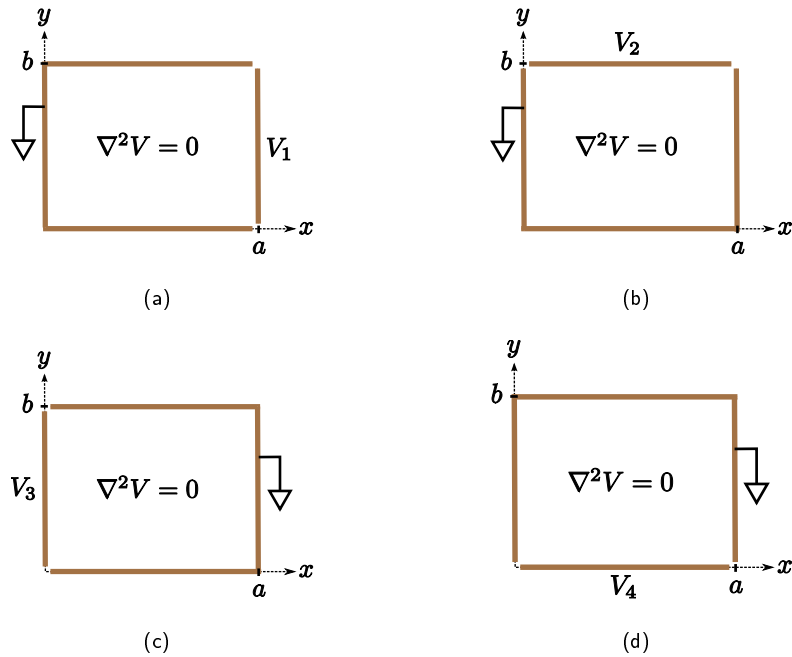


Figura 3.6: Subdivisión del problema global dado en la figura 3.5 en cuatro problemas particulares.

Se procederá a resolver el problema particular siguiendo los desarrollos presentados en [4, 9]:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \\ V(a, y) = V_1 \quad V(x, b) = 0 \\ V(0, y) = 0 \quad V(x, 0) = 0 \end{array} \right\} \quad (3.18)$$

para ello se supondrá que la solución tiene la forma de un producto de dos funciones, X y Y , las cuales dependen única y respectivamente de las variables x y y : $X = X(x)$

y $Y = Y(y)$, de tal suerte que $V(x, y) = X(x)Y(y)$. Sustituyendo este producto en la ecuación de Laplace:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} &= 0 \\ Y \frac{d^2 X}{dx^2} + X \frac{d^2 Y}{dy^2} &= 0 \\ \underbrace{\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2}}_{F_1(x)} + \underbrace{\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2}}_{F_2(y)} &= 0\end{aligned}\quad (3.19)$$

Para que la suma de $F_1(x)$ y $F_2(y)$ se mantenga igual a cero en todos los puntos dentro del dominio rectangular se requiere que las funciones F_1 y F_2 sean iguales mutuamente a una constante: $F_1(x) = \alpha^2$ y $F_2(y) = -\alpha^2$, lo cual permite escindir la Ecuación de LAPLACE en dos ecuaciones diferenciales unidimensionales:

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = \alpha^2 \quad (3.20)$$

$$-\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = \alpha^2 \quad (3.21)$$

Por solución de la ecuación (3.20) se tomará:

$$X(x) = A \cosh(\alpha x) + B \sinh(\alpha x) \quad (3.22)$$

y por solución de la ecuación (3.21) se tomará:

$$Y(y) = C \cos(\alpha y) + D \sin(\alpha y) \quad (3.23)$$

De este modo la solución buscada tiene la forma:

$$V(x, y) = [A \cosh(\alpha x) + B \sinh(\alpha x)] [C \cos(\alpha y) + D \sin(\alpha y)] \quad (3.24)$$

Las constantes indeterminadas A , B , C y D se determinan evaluando $V(x, y)$ en la frontera:

$$\begin{aligned}V(x, 0) = 0 &\Rightarrow [X(x)] [C] = 0 \Rightarrow C = 0 \\ V(x, b) = 0 &\Rightarrow [X(x)] [D \sin(\alpha b)] = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{m\pi}{b} \\ &m = 1, 2, \dots, \infty \\ V(0, y) = 0 &\Rightarrow A \left[D \sin\left(\frac{m\pi}{b} y\right) \right] = 0 \Rightarrow A = 0\end{aligned}$$

obteniendo

$$V(x, y) = V_0 \sinh\left(\frac{m\pi}{b} x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b} y\right) \quad (3.25)$$

con $m = 1, 2, \dots, \infty$ y $V_0 = BC$.

Ciertamente la función $V(x, y) = V_0 \sinh\left(\frac{m\pi}{b}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right)$ no puede satisfacer la condición de borde $V(a, y) = V_1$. Sin embargo, ya que la ecuación (3.25) representa en realidad una familia de soluciones, cualquier combinación lineal de los miembros de esta familia constituye, a su vez, una solución de la ecuación (3.18) y satisface, además, las condiciones de borde $V(x, 0) = 0$, $V(x, b) = 0$ y $V(0, y) = 0$:

$$V(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} V_m \sinh\left(\frac{m\pi}{b}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right)$$

No es ilógico pensar que pueda existir una apropiada combinación lineal de estas soluciones que satisfaga la cuarta condición de borde: $V(a, y) = V_1$, condición de frontera que ninguno de los miembros de la familia (3.25) satisface individualmente:

$$V(a, y) = V_1 \Rightarrow \sum_{m=1}^{\infty} V_m \sinh\left(\frac{m\pi}{b}a\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) = V_1$$

equivalentemente:

$$\sum_{m=1}^{\infty} c_m \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) = V_1 \quad (3.26)$$

donde $c_m = V_m \sinh\left(\frac{m\pi a}{b}\right)$ es cierto número para cada valor de m . En la ecuación (3.26), la sumatoria $\sum_{m=1}^{\infty} c_m \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right)$ puede verse como la expansión en serie de Fourier de la constante V_1 , y las constantes c_m como los coeficientes de la serie. Los coeficientes c_m pueden calcularse haciendo la función $V(a, y)$ periódica, de período $2b$, y de simetría impar mediante el siguiente producto interno:

$$c_m = \frac{2}{b} \int_{-b}^0 \left[-\sum_{m=1}^{\infty} c_m \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \right] \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) dy + \frac{2}{b} \int_0^b \left[\sum_{m=1}^{\infty} c_m \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \right] \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) dy$$

$$c_m = \frac{2}{b} \int_{-b}^0 [-V_1] \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) dy + \frac{2}{b} \int_0^b [V_1] \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) dy$$

de donde:

$$c_m = \begin{cases} \frac{4V_1}{m\pi} & m \text{ impar} \\ 0 & m \text{ par} \end{cases} \quad (3.27)$$

siguiendo que:

$$V_m = \frac{4V_1}{m\pi \sinh(m\pi a/b)}, \quad m \text{ impar}$$

y

$$V(x, y) = \sum_{\substack{m=1 \\ m \text{ impar}}}^{\infty} \frac{4V_1}{m\pi \sinh(m\pi a/b)} \sinh\left(\frac{m\pi}{b}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \quad (3.28)$$

En la figura 3.7 se muestra una gráfica de $V(x, y)$ para $V_1 = 2$.

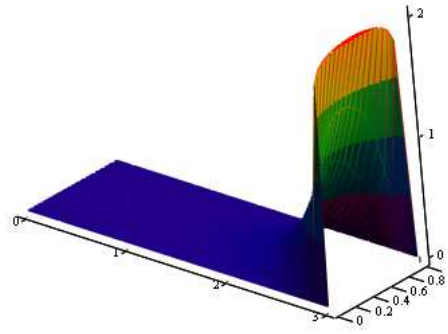


Figura 3.7: Grafica de $V(x, y)$ para $V_1 = 2$.

Cuadro 3.2: Soluciones particulares del problema global expresado mediante la ecuación (3.17).

Problema de contorno	Solución
$\left. \begin{array}{l} \nabla^2 V = 0 \\ V(a, y) = 0 \quad V(x, b) = V_2 \\ V(0, y) = 0 \quad V(x, 0) = 0 \end{array} \right\}$	$\sum_{m \text{ impar}}^{\infty} \frac{4V_2}{m\pi \sinh(m\pi b/a)} \sinh\left(\frac{m\pi}{a}y\right) \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)$
$\left. \begin{array}{l} \nabla^2 V = 0 \\ V(a, y) = 0 \quad V(x, b) = 0 \\ V(0, y) = V_3 \quad V(x, 0) = 0 \end{array} \right\}$	$\sum_{m \text{ impar}}^{\infty} \frac{4V_3}{m\pi \sinh(m\pi a/b)} \sinh\left[\frac{m\pi}{b}(-x+a)\right] \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right)$
$\left. \begin{array}{l} \nabla^2 V = 0 \\ V(a, y) = 0 \quad V(x, b) = 0 \\ V(0, y) = 0 \quad V(x, 0) = V_4 \end{array} \right\}$	$\sum_{m \text{ impar}}^{\infty} \frac{4V_4}{m\pi \sinh(m\pi b/a)} \sinh\left[\frac{m\pi}{a}(-y+b)\right] \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)$

Las restantes soluciones particulares del problema global (ecuación 3.17) se pueden componer a partir de la solución (3.28) permutando apropiadamente los valores $a \leftrightarrow b$ y las variables $x \leftrightarrow y$, y rotando y desplazando, apropiadamente, las funciones en x y en y . En la tabla 3.2 se muestran estas soluciones.

3.4. Teoría de imágenes

Algunos problemas del tipo ilustrado en la Fig. (3.2(b)), por presentar una elevada simetría, se les puede resolver mediante la sustitución de los cuerpos conductores por unas cargas equivalentes *determinadas*, que se pueden integrar, denominadas *cargas imágenes*. Las cargas imágenes producirán el potencial $V_H(\mathbf{r})$ de la solución

expresada mediante la Ec. (3.1) en la región R ($\mathbf{r} \in R$)

$$V_H(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{V'_C} \frac{\rho_\nu^{im}(\mathbf{r}')}{R} d\nu'$$

donde V'_C es el volumen del conductor, tal que la solución $V_P(\mathbf{r}) + \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{V'_C} \frac{\rho_\nu^{im}(\mathbf{r}')}{R} d\nu'$ satisfaga las condiciones de borde en ∂R . Variados ejemplos y problemas que ilustran la aplicación de este método se pueden encontrar en la literatura [4, 3, 6]. En una entrega posterior de este artículo el autor incluirá una ilustración de la aplicación del método a un problema concreto.

3.5. Problemas propuestos

1. Dado el sistema de conductores que se ilustra en la Fig. 3.8, constituido por una esfera conductora de radio a concéntricamente ubicada en el interior de un segundo conductor esférico hueco, de radio interior b y radio exterior c , si en el conductor interno se depositan Q_0 [C] en exceso

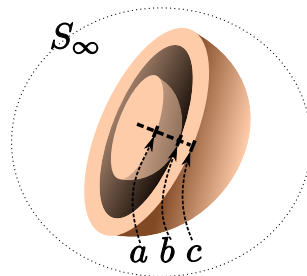


Figura 3.8: Corte transversal del sistema de conductores del Problema 1.

- a) Resuelva el potencial eléctrico V y el campo eléctrico \mathbf{E} postulando, razonadamente, un problema de NEUMANN en la región $a < r < b$ y un problema mixto en la región $c < r < \infty$.
 - b) Resuelva el potencial eléctrico V y el campo eléctrico \mathbf{E} postulando, razonadamente, un problema mixto en ambas regiones.
2. Dos semi-planos conductores de dimensiones infinitas forman un ángulo $\Delta\varphi$ como se muestra en la Fig. 3.3(c). Entre estos semi-planos hay un medio de propiedades intrínsecas ϵ y σ .

- a) Calcular la capacitancia $C = Q(\Delta V)/\Delta V$ asociada a la porción del sistema definida por $\Delta z = h$ y $\Delta \rho = \rho_e - \rho_i$.
- b) Calcular la resistencia R asociada a la misma porción del sistema mediante la fórmula $R = \Delta V/I$.
- c) Comprobar que $RC = \varepsilon/\sigma$.
3. Dos conductores de dimensiones infinitas forman un ángulo $\Delta\theta$ como se ilustra en la Fig. 3.3(e). Entre los dos conductores hay un medio de propiedades intrínsecas ε y σ .
- a) Calcular la capacitancia $C = Q(\Delta V)/\Delta V$ asociada a la porción del sistema definida por $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ y $\Delta r = r_e - r_i$.
- b) Calcular la resistencia R asociada a la misma porción del sistema mediante la fórmula $R = \Delta V/I$.
- c) Comprobar que $RC = \varepsilon/\sigma$.

Capítulo 4

Corriente eléctrica

4.1. Densidad de corriente

Dado un medio en cuyo interior ciertos portadores de carga pueden moverse libremente bajo la acción de un campo eléctrico. Sea N_q el número de estos portadores de carga por unidad de volumen, y sea \mathbf{v} la velocidad promedio equivalente de los portadores de carga. Tomado en el interior del medio un volumen diferencial ν rectangular, la cantidad de carga que atraviesa una cualquiera de las superficies de este volumen por unidad de tiempo vale:

$$I = \frac{dq}{dt} = N_q \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_n ds \quad [\text{A/m}] \quad (4.1)$$

La cantidad $N_q \mathbf{v}$ tiene unidades de $[\text{A/m}^2]$ y se denomina **vector densidad de corriente**:

$$\mathbf{J} = N_q \mathbf{v} \quad (4.2)$$

De esta forma, **la corriente eléctrica** que atraviesa una superficie genérica S dentro del medio se calcula mediante la integral:

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} \quad (4.3)$$

Por otro lado, el término $N_q \mathbf{v}$ admite la siguiente representación:

$$N_q \mathbf{v} = \begin{cases} \rho \mathbf{u}, & \text{corriente de convección;} \\ -\rho_e u_e \mathbf{E} = \sigma \mathbf{E}, & \text{corriente de conducción en conductores;} \\ (-\rho_e u_e + \rho_h u_h) \mathbf{E} = \sigma \mathbf{E}, & \text{corriente de conducción en semiconductores.} \end{cases} \quad (4.4)$$

donde ρ , ρ_e y ρ_h son las densidades volumétricas de portadores de carga libres, de electrones en movimiento y de «huecos» en movimiento, respectivamente ($[\text{C/m}^3]$);

\mathbf{u} es la velocidad promedio de los portadores de carga libres, u_e es la **movilidad del electrón** ($[\text{m}^2/\text{V s}]$), y u_h la movilidad de los huecos; y σ es un parámetro constitutivo macroscópico del medio llamado **conductividad** ($[\text{S/m}]$). En el cuadro 4.1 se muestran algunos de estos valores para algunos materiales de uso frecuente en la ingeniería electrónica.

material	u_e [$\text{m}^2/\text{V s}$]	u_h [$\text{m}^2/\text{V s}$]	σ [S/m]
Cobre	$3,2 \times 10^{-3}$	-	$5,8 \times 10^7$
Aluminio	$1,4 \times 10^{-4}$	-	$3,54 \times 10^7$
Plata	$5,2 \times 10^{-3}$	-	$6,17 \times 10^7$
Germanio	0,38	0,18	2,2
Silicio	0,12	0,03	$1,6 \times 10^{-3}$

Cuadro 4.1: Movilidad y conductividad de algunos materiales.

La ecuación:

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (4.5)$$

se conoce como **ley de OHM puntual**.

4.1.1. Conservación de la carga o continuidad de la corriente

Si en lugar de tomar una superficie abierta genérica en el interior del medio, tomamos una superficie $S(V)$ cerrada, el flujo de \mathbf{J} a través de $S(V)$ igualará la tasa de disminución de los portadores de cargas en el volumen V encerrado por $S(V)$. Este principio, que se conoce como **principio de conservación de la carga**, se escribe:

$$\oint_{S(V)} \mathbf{J} \cdot \mathbf{ds} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho_\nu \, d\nu \quad (4.6)$$

La versión diferencial de la Ecuación (4.6) se obtiene aplicando el Teorema de la divergencia a la integral de la izquierda. En efecto:

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{J} \, d\nu = -\frac{d}{dt} \int_V \rho_\nu \, d\nu = -\int_V \frac{\partial}{\partial t} \rho_\nu \, d\nu \quad (4.7)$$

y ya que las cantidades subintegrales han de ser iguales para cualquier volumen V , se obtiene:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial}{\partial t} \rho_\nu \quad (4.8)$$

La Ecuación (4.8) se conoce como **ecuación de continuidad** de la corriente. Para el caso de corrientes estacionarias, $\partial \rho_\nu / \partial t = 0$, la Ecuación (4.8) se convierte:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (4.9)$$

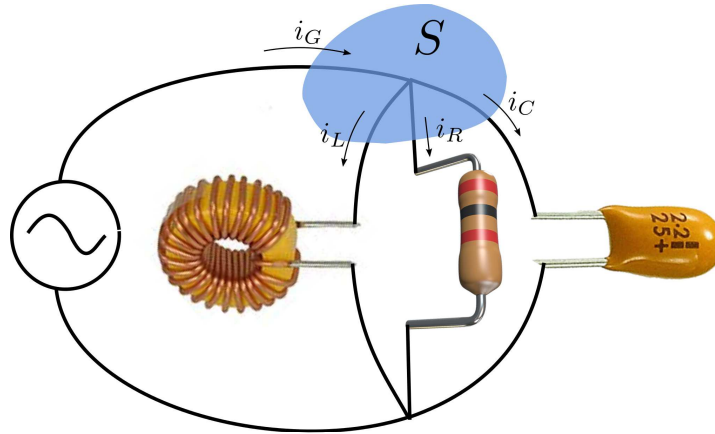


Figura 4.1: Circuito RLC paralelo ideal para deducir la ley de corrientes de KIRCHHOFF a partir de la ecuación de continuidad de la corriente en su forma integral (4.6). El cómputo del flujo de la densidad de corriente a través de la superficie S conduce a la suma de las corrientes que abandonan el nodo superior del circuito: $\int_S \rightarrow \sum_n$. La corriente del generador ha de sumarse con polaridad negativa de acuerdo a la convención de la Teoría de Circuitos.

Para el circuito de la Fig. 4.1, la integración de la Ec. (4.9), a través de la superficie que encierra el nodo superior, da lugar a:

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad (4.10)$$

$$\sum_n I_n = 0 \quad (4.11)$$

la cual se conoce como la **ley de corrientes de KIRCHHOFF**.

4.1.2. Tiempo de expansión o de relajación

Al depositar cierta cantidad de cargas libres en un medio material, caracterizado por una conductividad σ y una permitividad eléctrica ϵ , éstas tenderán a expandirse en él por la acción repulsiva del campo propio. En un punto cualquiera del medio la densidad volumétrica de cargas ρ_ν tenderá a disminuir por la «relajación» del material, o la «expansión» de las cargas, de acuerdo a la Ecuación (4.8), la cual, tomando en cuenta que $\mathbf{J} = \frac{\sigma}{\epsilon} \mathbf{D}$ y que $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_\nu$ puede ser escrita de la forma:

$$\frac{d\rho_\nu}{dt} + \frac{\sigma}{\epsilon} \rho_\nu = 0 \quad (4.12)$$

La solución de la Ec. (4.12) es

$$\rho_\nu = \rho_0 e^{-\frac{\sigma}{\epsilon} t} \quad (4.13)$$

donde ρ_0 es el valor inicial de la densidad volumétrica de carga en el punto.

La constante $\tau = \frac{\epsilon}{\sigma}$ se conoce como tiempo de relajación, y permite cuantificar la rapidez con que las cargas se expanden hacia la superficie del medio material. La constante de relajación también nos permite clasificar el medio material como dieléctrico, si la expansión de las cargas ocurre muy lentamente, o como conductor, si la relajación del medio ocurre muy rápidamente.

4.1.3. Resistencia

En la figura 4.2 se muestra un trozo cilíndrico de un material con cierta conductividad homogénea. Tomando como referencia dicha figura y a partir de la ecuación puntual de OHM (4.5), podemos escribir para el volumen del material:

$$\int_V \mathbf{J} \, d\nu = \int_V \sigma \mathbf{E} \, d\nu$$

Asumiendo que \mathbf{E} es uniforme y que se desarrolla paralelamente al eje del cilindro, definiendo el diferencial de volumen como $d\nu = d\ell ds$, y tomando $d\ell \parallel \mathbf{E}$ podemos escribir:

$$\int_V J \mathbf{a}_j \, d\ell ds = \int_V \sigma E \mathbf{a}_e \, d\ell ds$$

y como $\mathbf{a}_j \equiv \mathbf{a}_e$ resulta

$$\int_V J \, d\ell ds = \int_V \sigma E \, d\ell ds$$

Tomando en cuenta que J es uniforme y que $J ds = dI$, siendo dI la corriente diferencial que atraviesa el diferencial de superficie ds , será $\int_V J \, d\ell ds = IL$, donde L es la longitud del cilindro e I la corriente que circula por él. De manera análoga, tomando en cuenta que $E d\ell$ es la diferencia de potencial ΔV entre los extremos del diferencial de camino $d\ell$, será $\int_V \sigma E \, d\ell ds = \sigma \Delta V S$, donde S es el área transversal del cilindro y ΔV es la diferencia de potencial entre los extremos del mismo. De esta forma obtenemos:

$$IL = \sigma \Delta V S$$

Y de aquí:

$$\frac{\Delta V}{I} = \frac{L}{\sigma S}$$

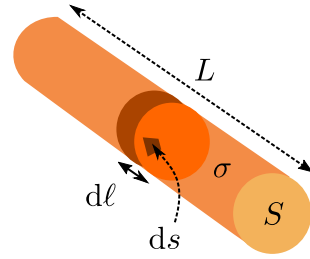


Figura 4.2: Cilindro de material conductor de longitud L , área transversal S y conductividad homogénea σ .

La cantidad $\frac{L}{\sigma S}$, que depende solo de la geometría y de las propiedades intrínsecas del material, se denomina **resistencia** R del sistema estudiado (figura tal). Para un sistema genérico (cierto material homogéneo con cierta conductividad σ y cierta forma geométrica) se define la resistencia:

$$R = \frac{\Delta V}{I} = \frac{-\int_{-}^{+} \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell}}{\oint_S \sigma \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}} \quad (4.14)$$

Capítulo 5

Magnetostática

5.1. Ley de fuerza de AMPERE

AMPERE determinó que la fuerza que experimenta un circuito C_2 de corriente continua I_2 , debido a la «influencia» de un segundo circuito C_1 de corriente continua I_1 , ambos en el vacío, vale (Fig. 5.1):

$$\mathbf{F}_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_2} I_2 d\mathbf{l}_2 \times \oint_{C_1} I_1 d\mathbf{l}_1 \times \frac{\mathbf{a}_{R_{21}}}{R_{21}^2} \quad (5.1)$$

donde $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ [H/m]¹ es la permeabilidad magnética del vacío, $\mathbf{R}_{21} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ y $\mathbf{a}_{R_{21}} = \mathbf{R}_{21}/R_{21}$.

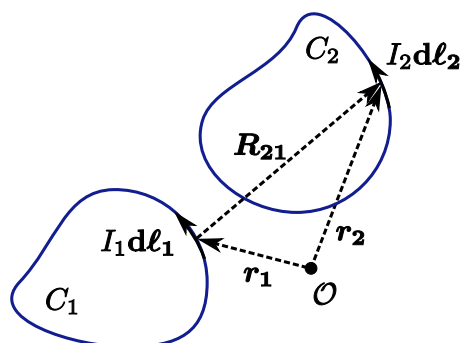


Figura 5.1: Ley de fuerza de AMPERE.

La Ecuación 5.1 se conoce como **ley de fuerza de AMPERE**.

¹H=Henrios

5.2. Campo magnetostático

5.2.1. Ley de BIOT-SAVART

El término:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} I_1 d\boldsymbol{\ell}_1 \times \frac{\mathbf{a}_{R_{21}}}{R_{21}^2} \quad (5.2)$$

que solo depende de la geometría y de la corriente del circuito C_1 , es el campo **densidad de flujo magnético** o **inducción magnética** \mathbf{B} [W/m^2]² o [T]³ producido por el circuito C_1 . La Ecuación 5.2 se conoce como **ley de BIOT-SAVART**.

5.2.2. Campo magnetostático producido por un carga puntual que se mueve a una velocidad uniforme

El campo magnético producido por un elemento de corriente puntual se puede definir a partir de la fuerza entre dos elementos infinitesimales de corriente, extrayéndola de la Ec. (5.1):

$$d\mathbf{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 d\boldsymbol{\ell}_1 \times I_2 d\boldsymbol{\ell}_2 \times \frac{\mathbf{a}_{R_{12}}}{R_{12}^2} \quad (5.3)$$

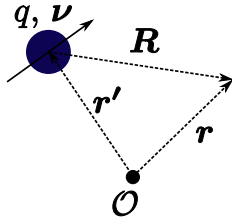


Figura 5.2: Carga puntual con velocidad \mathbf{v} .

Al reemplazar los elementos infinitesimales de corriente $I_1 d\boldsymbol{\ell}_1$ y $I_2 d\boldsymbol{\ell}_2$ en la Ec. (5.3) por elementos infinitesimales de corriente de convección:

$$d\mathbf{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \rho_{v1} d\nu_1 \mathbf{v}_1 \times \rho_{v2} d\nu_2 \mathbf{v}_2 \times \frac{\mathbf{a}_{R_{12}}}{R_{12}^2} \quad (5.4)$$

y al poner $\rho_{v1} = q_1 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)$ y $\rho_{v2} = q_2 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2)$, se obtiene:

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} q_1 \mathbf{v}_1 \times q_2 \mathbf{v}_2 \times \frac{\mathbf{a}_{R_{12}}}{R_{12}^2} \quad (5.5)$$

Finalmente, al dividir la fuerza \mathbf{F}_{12} entre el elemento de corriente puntual $q_1 \mathbf{v}_1$ y al tomar el límite $q_1 \mathbf{v}_1 \rightarrow 0$, obtenemos el campo magnético producido por $q_2 \mathbf{v}_2$ en el punto \mathbf{r}_2 :

$$\mathbf{B}_{12} = \lim_{q_1 \mathbf{v}_1 \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}_{12}}{q_1 \mathbf{v}_1} = \frac{\mu_0}{4\pi} q_2 \mathbf{v}_2 \times \frac{\mathbf{a}_{R_{12}}}{R_{12}^2} \quad (5.6)$$

²W=Weber

³T=Tesla

De esta forma definimos el campo magnético en \mathbf{r} producido por un elemento puntual de corriente $q\mathbf{v}$ puesto en \mathbf{r}' , despreciando los efectos relativistas y el retardo de propagación del campo, mediante la expresión:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} q\mathbf{v} \times \frac{\mathbf{a}_R}{R^2} \quad (5.7)$$

donde $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ y $\mathbf{a}_R = \mathbf{R}/R$.

Obsérvese que el campo magnético se puede expresar de la siguiente manera equivalente:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} q\mathbf{v} \times \frac{\mathbf{a}_R}{R^2} \\ &= \underbrace{\frac{\mu_0 \varepsilon_0}{1/c^2}}_{1/c^2} \mathbf{v} \times \underbrace{\frac{q}{4\pi \varepsilon_0} \frac{\mathbf{a}_R}{R^2}}_E \\ &= \frac{\mathbf{v}}{c^2} \times \mathbf{E} \end{aligned}$$

donde \mathbf{E} es el campo eléctrico producido por q .

5.2.3. Campo magnetostático producido por una distribución cualquiera de corriente

En la Fig. 5.3 se muestran diferentes distribuciones idealizadas de corriente, a saber: una distribución discreta de cargas con velocidad uniforme v , una distribución lineal de corriente $I_\ell(\mathbf{r}')$, una distribución superficial de corriente $\mathbf{J}_s(\mathbf{r}')$ y una distribución volumétrica de corriente $\mathbf{J}_v(\mathbf{r}')$.

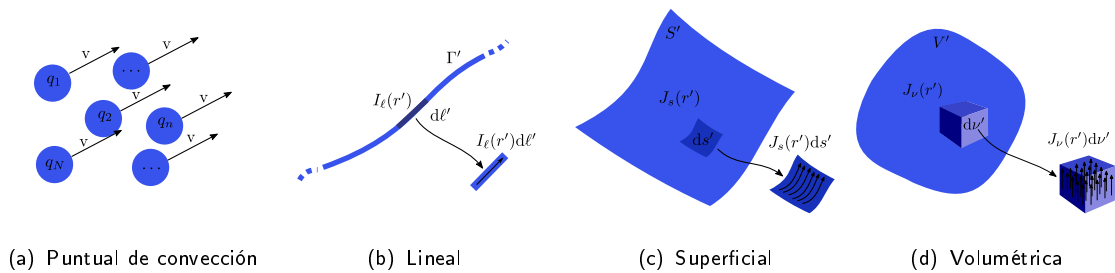


Figura 5.3: Diferentes distribuciones de corriente.

Las expresiones del campo magnético producido por las distribuciones de corriente ilustradas en la Fig. 5.3 se muestran en el Cuadro 5.1.

La fórmula en la cuarta casilla del Cuadro 5.1 es, entre todas, la más general expresión del campo magnético:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{a}_R}{R^2} dV' \quad (5.8)$$

Cuadro 5.1: Campo magnético producido por las diferentes distribuciones de corriente ilustradas en la Fig. 5.3.

Tipo de distribución de corriente	Campo magnético
Puntual de convección	$\mathbf{B} = \sum_{n=1}^N \frac{\mu_0}{4\pi} q_n \mathbf{v}_n \times \frac{\mathbf{a}_{Rn}}{R_n^2}$
Distribución lineal	$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C I d\mathbf{l}' \times \frac{\mathbf{a}_R}{R^2}$
Distribución superficial	$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S'} \mathbf{J}_s(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{a}_R}{R^2} ds'$
Distribución volumétrica	$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{a}_R}{R^2} dV'$

5.3. Divergencia del campo magnetostático

Calculemos la divergencia del campo magnético:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{B} &= \nabla \cdot \left[\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{a}_R}{R^2} dV' \right] \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \nabla \cdot \left[\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{a}_R}{R^2} \right] dV' \end{aligned}$$

usando la identidad vectorial $\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G} \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) - \mathbf{F} \cdot (\nabla \times \mathbf{G})$ obtenemos

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{a}_R}{R^2} \cdot [\nabla \times \mathbf{J}(\mathbf{r}')] dV' - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \left[\nabla \times \frac{\mathbf{a}_R}{R^2} \right] dV'$$

y tomando en cuenta que $\nabla \times$ opera sobre las variables no primadas y que $\mathbf{J}(\mathbf{r}')$ es una función de las variables primadas, y que $\nabla \times \frac{\mathbf{a}_R}{R^2} = 0$ (porque $\frac{\mathbf{a}_R}{R^2} = -\nabla\left(\frac{1}{R}\right)$), sigue que

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (5.9)$$

5.3.1. Vector potencial magnético

En virtud de la Ecuación (5.9), el campo de inducción magnética \mathbf{B} se podrá expresar como el rotacional de cierto campo auxiliar \mathbf{A} :

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (5.10)$$

donde \mathbf{A} es el **Vector Potencial Magnético**, el cual, invocando el Teorema de HELMHOLTZ, viene dado por:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \frac{\nabla \times \mathbf{B}}{R} dV' \quad (5.11)$$

Al «manipular» lícitamente la Ec. 5.8 se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{a}_R}{R^2} d\nu' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \nabla \left(\frac{1}{R} \right) \times \mathbf{J}(\mathbf{r}') d\nu' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \nabla \times \left(\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{R} \right) d\nu' - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\nabla \times \mathbf{J}(\mathbf{r}')}{R} d\nu' \\ &= \nabla \times \left[\frac{1}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{r}')}{R} d\nu' \right] \end{aligned} \quad (5.12)$$

de donde, por comparación con la Ec. (7.22), sigue que:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{r}')}{R} d\nu' \quad (5.13)$$

Ejemplo Se desea calcular el campo \mathbf{A} en el punto $P(0, 0, 5)$ producido por una corriente de $\frac{40}{3}$ nA que se desarrolla a lo largo de una espira circular de radio 2 m la cual yace sobre el plano $z = 0$ y su centro coincide con el origen.

Solución La expresión general del Vector Potencial Magnético dada en la Ec. (5.13) consiste, a menos de la constante $\frac{\mu_0}{4\pi}$, en la suma vectorial de los elementos de corriente pesados por el inverso de la distancia al punto de observación. Para el caso de una distribución filamentaria, la Ec. (5.13) asume la forma particular

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{\Gamma'} \frac{d\boldsymbol{\ell}'}{R}$$

Ya que el punto considerado equidista $R = \sqrt{29}$ m de todos los elementos de corriente, será

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(0, 0, 5) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{\sqrt{29}} \oint_{\Gamma'} d\boldsymbol{\ell}' \\ &= 0 \end{aligned}$$

5.4. Rotacional del campo magnetostático

El campo magnético –ver Cuadro (5.1)– parece «rotar» alrededor de las corrientes que lo producen, por ello, y con base en la comparación de las Ecs. (5.11) y (5.20), anticipamos que su rotacional, que consiste en la densidad de sus fuentes vectoriales por unidad de área, debe coincidir con $\mu_0 \mathbf{J}$.

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (5.14)$$

El Cálculo de $\nabla \times \mathbf{B}$ a partir de la expresión general de \mathbf{B} –Ec. (5.8)– es bastante engorroso, sin embargo, para fines didácticos en la Sección (5.9) presentamos dos formas de calcularlo.

5.5. Ley circuital de AMPERE

Las Ecuaciones (5.9) y (5.14) constituyen la ecuaciones de Maxwell del campo magnético estático:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (5.15)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (5.16)$$

Las versiones integrales de las ecuaciones 8.23 y 8.4 son, respectivamente:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_{S(C)} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} \quad (5.17)$$

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad (5.18)$$

La Ecuación 5.17 se conoce como **ley circuital de AMPERE**.

En algunos casos de elevada simetría de la distribución de corriente es posible resolver *fácilmente* el campo magnético usando la Ley Circuital de AMPERE en forma integral. Para ello es necesario poder inferir *a priori* la estructura del campo en un sistema de coordenadas en el cual dicha estructura quede expresada de manera natural. Si, inferida la estructura del campo, resulta posible concebir un camino cerrado especial, dígame Γ , de modo que el campo magnético sea en cierta porción de Γ tangente y uniforme, y en el resto de Γ simplemente normal o nulo, entonces la componente tangencial B_t se podrá factorizar de la integral de línea y se la podrá calcular como la razón de la corriente que se eslabona con Γ a la longitud de la porción de Γ tangente al campo \mathbf{B} , pesada por μ_0 :

$$B_t = \mu_0 \frac{I \text{ eslabonada con } \Gamma}{\text{longitud de la porción de } \Gamma \text{ tangente a } \mathbf{B}}$$

Ejemplo Se desea calcular el campo magnético \mathbf{B} que produce una distribución de corriente $\mathbf{J} = 2\delta(\rho - a)\mathbf{a}_\varphi$ A/m² como se ilustra en la Fig. 5.4(a).

Solución En la aplicación de la Ley Circuital de AMPERE para resolver el campo magnético, es imprescindible inferir *a priori* la estructura del campo. La inferencia de la estructura del campo parte del íntimo conocimiento del campo que nos proporcionan las Ecs. (8.23) y (8.4). De la Ecuación (8.23) comprendemos que el campo \mathbf{B} rota, o circula, transversalmente alrededor de sus fuentes (las corrientes). Por ello, no queda otra alternativa que admitir que el campo que deseamos resolver ha de tener la estructura

$$\mathbf{B} = \begin{cases} B_0 \mathbf{a}_z & ; \rho < a \\ 0 & ; \rho > a \end{cases} \quad (5.19)$$

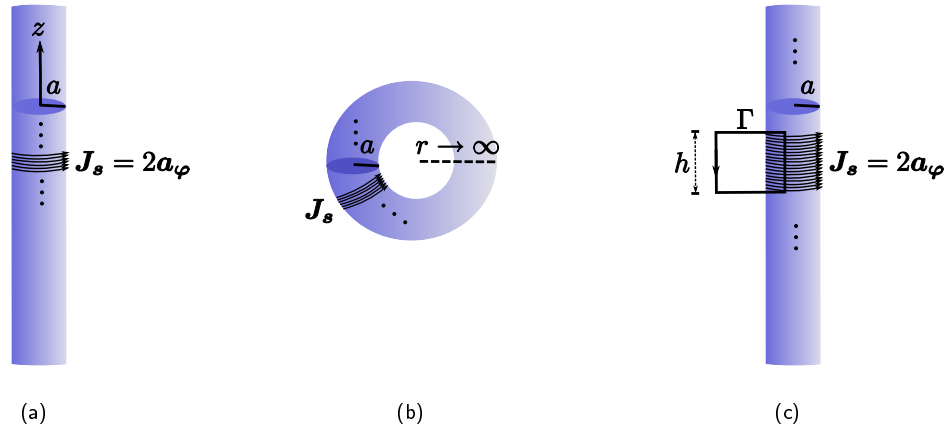


Figura 5.4: Distribución de corriente $\mathbf{J} = 2\delta(\rho-a)\mathbf{a}_\varphi$ A/m². a) La corriente se distribuye sobre la superficie $\rho = a$ en dirección de \mathbf{a}_φ . b) Una distribución como esta se puede obtener de una similar sobre la superficie de un toroide, cuyo radio r tiende a infinito. c) Elección de una curva Γ cerrada para la aplicación de la Ley Circuital de AMPERE.

Para aquel lector a quien resulte difícil aceptar la validez de esta expresión puede proceder imaginando la corriente como distribuida sobre la superficie cilíndrica de un toroide de radio infinito –ver Fig. 5.4(b)–, lo cual le ayudará a aceptar que $\mathbf{B} = 0$ para $\rho > a$. En admitir que la dirección del campo sea en \mathbf{a}_z para $\rho < a$ no creo que hayan mayores inconvenientes, pero su valor constante puede que no resulte evidente a primera vista. Para comprobar que el campo magnético ha de ser uniforme en la región $\rho < a$ podríamos postular, al contrario, que $\mathbf{B} = B_z(\rho)\mathbf{a}_z$, ya que las dependencias eventuales de B_z con las variables φ y z si se pueden descartar de manera obvia. Procediendo de esta manera comprobaríamos que $\nabla \times \mathbf{B} = -\mathbf{a}_\varphi \frac{\partial B_z}{\partial \rho} \neq 0$, lo cual implicaría la presencia de fuentes del campo en la región $\rho < a$, cosa que no es cierta y por tanto $\frac{\partial B_z}{\partial \rho} = 0$, comprobándose, efectivamente, que el campo ha de ser uniforme en dicha región.

Una vez determinada la estructura del campo (Ec. (5.19)) la selección de una camino cerrado para calcular B_0 es fácil: en la Fig. 5.4(c) se muestra un camino rectangular de altura h dispuesto sobre el mismo plano del eje z tal que uno de sus lados se desarrolle en el interior de la región $\rho < a$ y otro completamente fuera. Utilizando la Ec. (5.17), sustituyendo en ella $\mathbf{B} = B_0\mathbf{a}_z$ y $C = \Gamma$, se podrá despejar B_0 como

$$\begin{aligned} B_0 &= \mu_0 \frac{J_s h}{\int_0^h dz} \\ &= 2\mu_0 \end{aligned}$$

y el campo magnético valdrá $\mathbf{B} = 2\mu_0\mathbf{a}_z$ T.

5.6. Medios materiales inmersos en un campo magnetostático

Un medio material, desde el punto de vista magnético y macroscópico, se puede pensar como una agrupación de incontables dipolos magnéticos atómicos⁴ suspendidos en el vacío, cuyas orientaciones en el espacio en la mayoría de los materiales, a excepción de los imanes permanentes, es talmente aleatoria que no es posible detectar algún campo magnético resultante. Para poder describir cuantitativamente la interacción entre un medio material y el campo de inducción magnética es conveniente revisar el concepto de dipolo magnético.

5.6.1. Dipolo magnético

Un dipolo magnético se puede definir a partir de un circuito cualquiera de corriente observando el circuito desde una distancia tal que se lo pueda considerar como un circuito puntual de corriente y que allí, sin embargo, su campo magnético no sea nulo. Todo circuito de corriente observado desde una distancia *apropiadamente alejada* es un dipolo magnético.

Con base en la Fig. 5.5 el Vector Potencial $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ producido por un circuito de corriente vale

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma} \frac{I d\boldsymbol{\ell}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (5.20)$$

Sin pérdida de generalidad, ubicando el origen lo más cerca posible del circuito, procederemos a evaluar \mathbf{A} a una distancia suficientemente grande como para aceptar que $\max\{r'\} \ll r$, lo cual nos permitirá, en las aproximaciones que introduciremos de seguido, despreciar los términos en r' de orden igual o superior a dos. En efecto, el término $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1}$ se aproximará por $r^{-1}(1 - \frac{2\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'}{r^2})^{-\frac{1}{2}}$, y éste, truncando la expansión binomial del término $(1 - \frac{2\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'}{r^2})^{-\frac{1}{2}}$, por la expresión $(\frac{1}{r} + \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'}{r^3})$, de tal suerte de poder reescribir la Ec. (5.20) de la forma aproximada (para $r \gg r'$):

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{I}{r} \oint_{\Gamma} d\boldsymbol{\ell} + \frac{I}{r^3} \oint_{\Gamma} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') d\boldsymbol{\ell} \right] \quad (5.21)$$

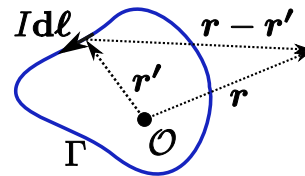


Figura 5.5: Circuito Γ genérico de corriente.

⁴La rotación o *spin* de los electrones, así como su traslación alrededor del núcleo se pueden modelar como sendos dipolos magnéticos elementales desde un punto de vista macroscópico.

La primera integral es nula porque $\oint_{\Gamma} \mathbf{d}\ell = 0$, mientras la segunda se la puede resolver para obtener (pags. 190–191 de [6])

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{I}{2} \oint_{\Gamma} \mathbf{r}' \times \mathbf{d}\ell \right) \times \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (5.22)$$

donde la cantidad entre paréntesis se denomina **momento dipolar magnético** $\mathbf{m} = \frac{I}{2} \oint_{\Gamma} \mathbf{r}' \times \mathbf{d}\ell$ [A·m²]. Aunque para obtener la Ec. (5.22) se ha ubicado el origen muy cerca del circuito, se puede demostrar (pags. 369–370 de [16]) que el momento dipolar magnético es independiente de la posición relativa del origen del sistema de coordenadas. El Vector Potencial magnético expresado en la Ec. (5.22) se puede reescribir de la manera compacta

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{m} \times \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (5.23)$$

El campo magnético $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ producido por el circuito de corriente de la Fig. en los puntos distantes $r \gg r'$ se puede calcular tomando el rotacional de la Ec. (5.23) (pag. 191 de [6]):

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}') \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{3\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}}{r^5} \mathbf{r} - \frac{\mathbf{m}}{r^3} \right] \quad (5.24)$$

Para un circuito de corriente en forma de espira circular (Figura 5.6), la integral $\frac{1}{2} \oint_{\Gamma} \mathbf{r}' \times \mathbf{d}\ell$ coincide con el área S coplanar de la espira y el momento dipolar magnético asume la forma:

$$\mathbf{m} = I\pi a^2 \mathbf{a}_n = IS\mathbf{a}_n = m\mathbf{a}_n \text{ [A/m}^2\text{]} \quad (5.25)$$

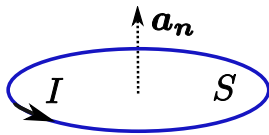


Figura 5.6: Dipolo magnético.

donde I es la corriente que circula por la espira, a es el radio de la espira, S el área de la espira y \mathbf{a}_n y el sentido de circulación de la corriente respetan la regla de la mano derecha.

Los campos potencial magnético y magnético producidos por un dipolo magnético, con \mathbf{m} en la dirección de \mathbf{a}_z y centrado en el origen, son, respectivamente:

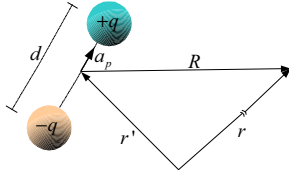
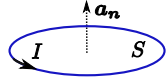
$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{a}_r}{r^2} \quad (5.26)$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I a^2}{r^3} (2 \cos \theta \mathbf{a}_r + \sin \theta \mathbf{a}_\theta) \quad (5.27)$$

Analogías con el dipolo eléctrico

Entre el dipolo magnético y el dipolo eléctrico existen evidentes analogías. En el Cuadro 5.2 se resumen las principales propiedades asociadas a ambos dipolos.

Cuadro 5.2: Analogías entre los dipolos magnético y eléctrico.

	dipolo eléctrico	dipolo magnético
momento dipolar	 $\mathbf{p} = qd\mathbf{a}_p$	 $\mathbf{m} = IS\mathbf{a}_n$
potencial asociado	$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{a}_r}{r^2}$	$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{a}_r}{r^2}$
campo producido	$\mathbf{E} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos \theta \mathbf{a}_r + \sin \theta \mathbf{a}_\theta)$	$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} (2 \cos \theta \mathbf{a}_r + \sin \theta \mathbf{a}_\theta)$

5.6.2. Imanación o polarización magnética

La imanación o magnetización es la reacción natural de la materia ante un campo magnético inicialmente externo. Esta «reacción» se puede modelar mediante la utilización del concepto previamente descrito del dipolo magnético.

¿Y cómo reacciona un dipolo magnético ante la presencia de un campo magnético externo?

La clave es la ley de fuerza de AMPERE: la fuerza magnética que experimenta una espira microscópica debido a un campo magnético es nulo al asumir que el campo \mathbf{B} es el mismo en todos los puntos de la espira:

$$\mathbf{F} = \oint_c I d\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{B} = \left(\oint_c I d\boldsymbol{\ell} \right) \times \mathbf{B} = 0$$

La espira experimenta entonces un torque \mathbf{T} que es independiente del origen respecto al cual se mide [14]:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \oint_c \mathbf{r} \times d\mathbf{F} \\ &= \oint_c \mathbf{r} \times (I d\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{B}) \\ &= \underbrace{\left(\int_{s(c)} I ds \right)}_m \times \mathbf{B} \end{aligned} \tag{5.28}$$

donde hemos tomado el centro de la espira (Fig. 5.6) como origen para el cálculo del torque.

$$\mathbf{T} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} \quad (5.29)$$



Figura 5.7: Magnetización de un medio material.

En virtud de este torque, el dipolo magnético tiende a alinearse con el campo magnético externo. Una generalización de esta idea al caso de una agrupación continua de dipolos magnéticos, como sería el caso de un medio material –ver Fig. 5.7(a)–, permite inferir que cada dipolo magnético dentro del medio material tenderá, dentro de ciertos límites físicos, a alinearse igualmente con el campo magnético externo. El resultado es la **imanación** o **magnetización** del material –ver Fig. 5.7(b)–.

Vector de magnetización

Magnetizado cierto medio, se define la siguiente densidad volumétrica de momento dipolar magnético (cantidad macroscópica) denominada **vector de magnetización**:

$$\mathbf{M} = \lim_{\Delta\nu \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=1}^{n\Delta\nu} \mathbf{m}_k}{\Delta\nu} [\text{A/m}] \quad (5.30)$$

De esta suerte, el diferencial de potencial magnético producido por la combinación vectorial de los momentos magnéticos contenidos en un volumen diferencial de cierto medio material vale:

$$d\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') d\nu' \times \mathbf{a}_R}{R^2} \quad (5.31)$$

El potencial magnético producido por la totalidad de los dipolos magnéticos del medio material, se puede calcular como –ver Fig. 5.8(a)–:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \mathbf{a}_R}{R^2} d\nu' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \nabla' \left(\frac{1}{R} \right) d\nu' \end{aligned} \quad (5.32)$$

Empleando la identidad vectorial $\nabla \times (\psi \mathbf{F}) = \psi \nabla \times \mathbf{F} + \nabla \psi \times \mathbf{F}$, la Ec. (5.32) se puede reescribir de la forma

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \nabla' \left(\frac{1}{R} \right) d\nu' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{R} d\nu' - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \nabla' \times \left(\frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')}{R} \right) d\nu' \end{aligned}$$

utilizando la identidad vectorial $\int_V \nabla \times \mathbf{F} d\nu = \oint_{S(V)} \mathbf{a}_n \times \mathbf{F} ds$ se obtiene finalmente:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}_m(\mathbf{r}')}{R} d\nu' + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S'} \frac{\mathbf{J}_{sm}(\mathbf{r}')}{R} ds' \quad (5.33)$$

donde

$$\mathbf{J}_m(\mathbf{r}') = \nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}') \quad (5.34)$$

$$\mathbf{J}_{sm}(\mathbf{r}') = \mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \mathbf{a}_n \quad (5.35)$$

son las densidades de corriente de magnetización volumétrica y superficial, respectivamente. Con la introducción de estas densidades de corriente ficticias el problema de calcular el campo de inducción magnética producido por un medio magnetizado se reduce a una integración similar a la que se tiene en los problemas de corrientes reales. Este procedimiento implica que el medio magnetizado sea reemplazado por las correspondientes densidades de corriente de magnetización \mathbf{J}_{sm} y \mathbf{J}_m , suspendidas en el vacío y distribuidas, respectivamente, sobre la superficie exterior y en el volumen interior del mismo medio –ver Fig. 5.8(b)–.

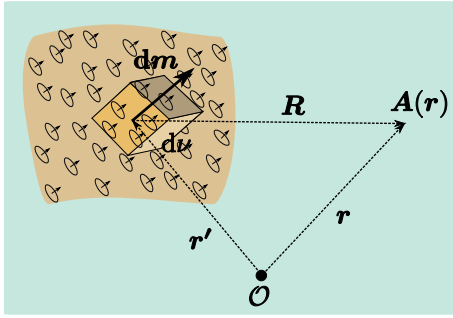
5.6.3. Ley de AMPERE en el interior de un medio material

Ya que un medio magnetizado produce un campo magnético, al tomar el rotacional del campo magnético en el interior de cierto medio infinitamente extenso, deberán tenerse presente todos los tipos de corriente capaces de producir campo magnético: $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \mathbf{J}_m)$. Queda claro, también, que al magnetizarse el medio material, lo hará por la acción del campo de inducción magnética producido tanto por las corrientes libres \mathbf{J} presentes, como por las de magnetización $\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M}$ inducidas. Matemáticamente:

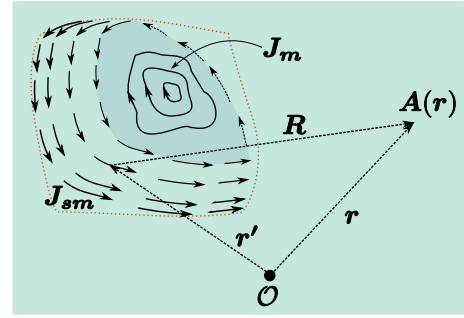
$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \nabla \times \mathbf{M}) \quad (5.36)$$

Las cantidades bajo el operador rotacional se pueden agrupar de la manera siguiente

$$\nabla \times \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right) = \mathbf{J} \quad (5.37)$$



(a) Campo \mathbf{A} producido por un medio magnetizado en términos de \mathbf{M} directamente, tal que $d\mathbf{m} = \mathbf{M}(\mathbf{r}')d\nu$.



(b) Campo \mathbf{A} producido por un medio magnetizado en términos de $\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M}$ y $\mathbf{J}_{sm} = \mathbf{M} \times \mathbf{a}_n$.

Figura 5.8: Visión cuantitativa de la magnetización. En la Figura 5.8(b) se pretende expresar que el medio ha sido substituido por las densidades de corriente de magnetización \mathbf{J}_{sm} y \mathbf{J}_m , suspendidas en el vacío y distribuidas sobre la superficie y en el volumen interior del medio, respectivamente.

La cantidad $\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}$ de la Ecuación 5.37, se puede concebir como un nuevo vector, más bien de carácter auxiliar que físico: es el vector **intensidad de campo magnético** $\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}$ [A/m], que depende solo de las corrientes *libres*:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (5.38)$$

De la Ecuación $\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}$ se puede despejar \mathbf{B} para obtener, luego, una expresión de utilidad en una gran cantidad de aplicaciones

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) \quad (5.39)$$

En efecto, en algunos materiales, el vector de magnetización \mathbf{M} se puede expresar mediante una función muy simple de la intensidad de campo magnético \mathbf{H} . Para ello, se define un parámetro adimensional denominado susceptibilidad magnética χ_m : $\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$, tal que, para estos materiales, la Ec. (11.154) se puede reescribir de la forma

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \chi_m \mathbf{H}) \quad (5.40)$$

$$= \mu_0 \underbrace{(1 + \chi_m)}_{\mu_r} \mathbf{H} \quad (5.41)$$

$$\mathbf{B} = \underbrace{\mu_0 \mu_r}_{\mu} \mathbf{H} \quad (5.42)$$

donde μ_r y μ son las permeabilidades magnéticas relativa y absoluta, respectivamente, del medio. Los parámetros χ_m y μ expresan, de manera concentrada, las

propiedades magnéticas del medio. En el sistema mks la permeabilidad magnética se expresa en unidades de Henrios sobre metro.

Aunque la relación entre las cantidades \mathbf{H} y \mathbf{B} según se expresa mediante la Ec. 5.42, es la más difundida, una relación más conveniente, porque describe mejor la realidad física del asunto es

$$\mathbf{H} = \mu^{-1} \mathbf{B}$$

donde \mathbf{B} ocupa el lugar de campo magnético primario, o campo *físico*, y \mathbf{H} de campo auxiliar, como corresponde [17].

Cuadro 5.3: Otras analogías entre las polarizaciones eléctrica y magnética.

dipolo magnético	dipolo eléctrico
$\mathbf{M} = \lim_{\Delta\nu \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=1}^{n\Delta\nu} \mathbf{m}_k}{\Delta\nu} [\text{A/m}]$	$\mathbf{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum_{n=1}^N \mathbf{p}_n}{\Delta V} [\text{C/m}^2]$
$\mathbf{J}_m(\mathbf{r}') = \nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}')$	$\rho_{\nu pol}(\mathbf{r}') = -\nabla' \cdot \mathbf{P}$
$\mathbf{J}_{sm}(\mathbf{r}') = \mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \mathbf{a}_n$	$\rho_{spol}(\mathbf{r}') = \mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{a}_n(\mathbf{r}')$
$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}_m(\mathbf{r}')}{R} d\nu' + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S'} \frac{\mathbf{J}_{sm}(\mathbf{r}')}{R} ds'$	$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{S'} \frac{\rho_{spol}(\mathbf{r}')}{R} ds' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho_{\nu pol}(\mathbf{r}')}{R} d\nu'$
$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}$	$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$
$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$	$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}$
$\mu = \mu_0 (1 + \chi_m)$	$\epsilon = \epsilon_0 (1 + \chi_e)$
$\mathbf{H} = \mu^{-1} \mathbf{B}$	$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$

5.6.4. Condiciones en la frontera

En la frontera entre dos medios materiales, el campo magnético se comporta como sigue:

$$(\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) \cdot \mathbf{a}_n = 0 \quad (5.43)$$

$$\mathbf{a}_n \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{J}_s \quad (5.44)$$

5.7. Energía magnética

Ya que toda vez que se establece una corriente en un circuito se debe realizar un trabajo en contra de la *f.e.m.* auto-inducida, mientras perdura la corriente, queda almacenada en la distribución de corriente, o en el campo magnético que esta produce, una energía magnética. La densidad volumétrica de energía magnética vale:

$$w_m = \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \quad (5.45)$$

Para un circuito en particular, la energía magnética almacenada en su entorno cercano se obtiene integrando la Ecuación (5.45):

$$W_m = \frac{1}{2} \int_{V'} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \, dv' \quad (5.46)$$

la cual se extiende en el espacio hasta los puntos donde los campos posean un valor significativo.

Una deducción de la Ecuación 5.45 solo será posible cuando hayamos estudiado la ley de inducción de FARADAY.

5.7.1. Inductancia

Todo sistema que pueda albergar una corriente tiene asociada cierta «capacidad» para almacenar energía magnética. Una medida de esta capacidad es la **autoinductancia** o simplemente **inductancia** L :

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\int_{S(\Gamma)} \mathbf{B} \cdot \mathbf{ds}}{\oint_{\Gamma} \mathbf{H} \cdot \mathbf{d}\ell} \quad (5.47)$$

donde Φ es el flujo total que se enlaza con el circuito de corriente, e I es la corriente del circuito que produce el campo magnético \mathbf{B} . El campo \mathbf{B} de la Ecuación (5.47) se puede calcular a partir de la ley de BIOT-SAVART (5.2), de modo que:

$$L = \frac{\int_{S(\Gamma)} \left(\frac{\mu}{4\pi} \oint_{\Gamma} I \mathbf{d}\ell \times \frac{\mathbf{a}_R}{R^2} \right) \cdot \mathbf{ds}}{I}$$

que al ser la corriente constante da lugar a:

$$L = \frac{\mu}{4\pi} \int_{S(\Gamma)} \left(\oint_{\Gamma} \mathbf{d}\ell \times \frac{\mathbf{a}_R}{R^2} \right) \cdot \mathbf{d}\mathbf{s} \quad (5.48)$$

De la Ecuación (5.48) se desprende que la inductancia es una función de las propiedades intrínsecas del medio $-\mu-$ en el que se encuentra inmerso el circuito de corriente y de la geometría de este $-S(\Gamma)$ y $\Gamma-$: $L = L(\text{medio, geometría})$.

5.8. Mini-proyectos

5.8.1. Mini-proyecto 1

Dada una espira rectangular de lado ℓ –ver Fig. 10.2– recorrida por una corriente I_0 , proceda a resolver los problemas que se plantean a continuación.

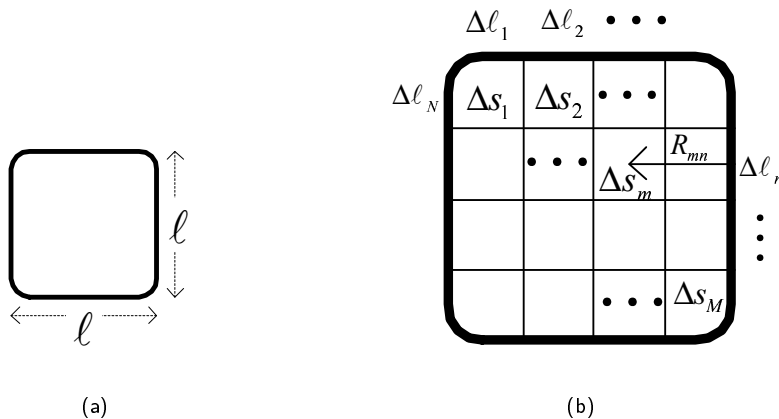


Figura 5.9: (a) Espira rectangular bajo estudio. (b) Espira discretizada

1. Intente calcular el campo \mathbf{B} analíticamente mediante los siguientes procedimientos:
 - a) Por integración directa: $\mathbf{B} = \mu/4\pi \oint_{\Gamma} I_0 \mathbf{d}\ell \times \mathbf{a}_R/R^2$.
 - b) Por diferenciación de \mathbf{A} : $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, con $\mathbf{A} = \mu/4\pi \oint_{\Gamma} I_0 \mathbf{d}\ell/R^2$
2. Intente calcular la inductancia L analíticamente como $L = \mu/4\pi \int_{S(\Gamma)} (\oint_{\Gamma} \mathbf{d}\ell \times \mathbf{a}_R/R^2) \cdot \mathbf{d}\mathbf{s}$, o usando el resultado de la pregunta anterior.
3. Calcule el campo \mathbf{B} analíticamente en el centro de la espira y evalúelo para un par de valores dados de I_0 y ℓ .

4. Discretice la espira como se ilustra en la Fig. 5.9(b) escogiendo un par de valores (N, M) convenientes, y:
- Calcule el campo B en el centro de la espira (en la superficie plana que contiene la espira) usando la aproximación $B_{m_0} \approx \mu I_0 / 4\pi \sum_n^N \Delta \ell_n / R_{m_0 n}^2$, donde $R_{m_0 n}$ es la distancia desde el punto medio del segmento $\Delta \ell_n$ al centro de la espira.
 - Calcule el error relativo de B_{m_0} respecto del valor obtenido en la pregunta 3. Concluya.
 - Calcule el campo B en el resto de los puntos centrales de cada superficie incremental ΔS_m usando la misma aproximación $B_m \approx \mu I_0 / 4\pi \sum_n^N \Delta \ell_n / R_{mn}^2$.
 - Calcule la desviación relativa de estos valores (B_m) respecto del valor del campo obtenido en el punto 4a (B_{m_0}). Concluya.
5. Calcule la inductancia L mediante las siguientes aproximaciones, compare los resultados y concluya:
- $L = \mu / 4\pi \sum_m \sum_n \Delta \ell_n \Delta S_m / R_{mn}^2$.
 - $L = \Phi / I_0$, con $\Phi = B_{m_0} S$, donde B_{m_0} es el valor del campo magnético en el centro de la espira obtenido en el punto 4a y S es el área de la espira: $S = \ell \times \ell$.

5.9. Cálculo del rotacional del campo de inducción magnética

5.9.1. Procedimiento primero.

Tómese el rotacional directamente de la expresión (5.8):

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B} &= \nabla \times \left[\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{a}_R}{R^2} d\nu' \right] \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \nabla \times \left[\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{a}_R}{R^2} \right] d\nu' \end{aligned} \quad (5.49)$$

usando la identidad vectorial:

$$\nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{F}(\nabla \cdot \mathbf{G}) - \mathbf{G}(\nabla \cdot \mathbf{F}) + (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F} - (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G}$$

obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \nabla \times \left[\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{a}_R}{R^2} \right] d\nu' = \\ \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \mathbf{J}(\mathbf{r}') \left[\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{a}_R}{R^2} \right) \right] d\nu' - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{a}_R}{R^2} [\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}')] d\nu' + \\ \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \left(\frac{\mathbf{a}_R}{R^2} \cdot \nabla \right) \mathbf{J}(\mathbf{r}') d\nu' - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} [\mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \nabla] \frac{\mathbf{a}_R}{R^2} d\nu' \quad (5.50) \end{aligned}$$

tomando en cuenta que $\mathbf{J}(\mathbf{r}')$ no depende de las variables no primadas, las cantidades subintegrales de la segunda y tercera integral del miembro de la derecha son nulas, resultando nulas también las integrales correspondientes. Teniendo presente que $\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{a}_R}{R^2} \right) = \nabla \cdot \left[-\nabla \left(\frac{1}{R} \right) \right] = -\nabla^2 \left(\frac{1}{R} \right) = 4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$:

$$\begin{aligned} -[\mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \nabla] \frac{\mathbf{a}_R}{R^2} &= [\mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \nabla'] \frac{\mathbf{a}_R}{R^2} \\ &= \sum_{n=x,y,z} \mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \left[\nabla' \left(\frac{n - n'}{R^3} \right) \right] \mathbf{a}_n \end{aligned}$$

y dado que

$$\nabla' \cdot \left[\mathbf{J}(\mathbf{r}') \frac{n - n'}{R^3} \right] = \mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \left[\nabla' \left(\frac{n - n'}{R^3} \right) \right] + [\nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}')] \frac{n - n'}{R^3}$$

la Ec. 5.49, en vista de que $\nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') = 0$, se puede reescribir como:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \mathbf{J}(\mathbf{r}') 4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d\nu' + \sum_{n=x,y,z} \left\{ \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \nabla' \cdot \left[\mathbf{J}(\mathbf{r}') \frac{n - n'}{R^3} \right] d\nu' \right\} \mathbf{a}_n \quad (5.51)$$

La primera de estas integrales será nula si se escoge el punto de observación fuera de la distribución de corriente ($\mathbf{r} \neq \mathbf{r}'$), ya que $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ será nula allí. Cuando se evalúe el rotacional del campo magnético en un punto dentro de la distribución de corriente será $\mathbf{J} \neq 0$, y la integral arrojará, a menos del factor 4π , el valor de la densidad de corriente en el punto de observación. Por otro lado, la segunda integral se puede resolver aplicando el teorema de la divergencia:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{J}(\mathbf{r}) 4\pi + \sum_{n=x,y,z} \left\{ \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{S'(V')} \frac{n - n'}{R^3} \mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{s}' \right\} \mathbf{a}_n \\ &= \mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

ya que al evaluar el flujo de \mathbf{J} a través de la superficie cerrada que delimita el recinto donde se localiza la corriente, no es posible obtener un valor distinto de cero, pues de lo contrario, el volumen V' no contendría toda la distribución de corriente.

5.9.2. Procedimiento segundo

Tómese el rotacional de la Expresión (7.22):

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \nabla \cdot \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A}$$

y ya que tenemos libertad para fijar cualquier valor de $\nabla \cdot \mathbf{A}$, asúmase, por ahora arbitrariamente, que $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, y resolvamos $-\nabla^2 \mathbf{A}$:

$$\begin{aligned} -\nabla^2 \mathbf{A} &= -\nabla^2 \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{R} d\nu' \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \nabla^2 \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{R} d\nu' \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \mathbf{J}(\mathbf{r}') \nabla'^2 \frac{1}{R} d\nu' \end{aligned}$$

donde se ha tomado en cuenta que $\nabla^2 \equiv \nabla'^2$. El cómputo de la integral $\int_{V'} \mathbf{J}(\mathbf{r}') \nabla'^2 \frac{1}{R} d\nu'$ se debe realizar teniendo mucho cuidado. Para ello es conveniente recordar que $\nabla'^2(1/R) = \nabla' \cdot (\mathbf{a}_R/R^2)$ y que $\nabla' \cdot (\mathbf{a}_R/R^2) = 0$ para todo $r \neq r'$. Así, fijado el punto de observación en el interior de V' , ya que fuera nos consta que $\nabla \times \mathbf{B} = 0$, justamente por lo que acabamos de observar, será necesario aislar r de r' durante el proceso de integración y calcular su contribución por separado. Para ello se divide el volumen V' en dos partes: V_σ , infinitesimalmente pequeño en cuyo centro se encuentra el punto de observación, y $V' - V_\sigma$ que contiene el resto de los puntos fuentes. Como en $V' - V_\sigma$ aun se cumple que $r \neq r'$, allí será $\nabla \times \mathbf{B} = 0$. En cambio, en V_σ :

$$\begin{aligned} -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_\sigma} \mathbf{J}(\mathbf{r}') \nabla' \cdot \frac{\mathbf{a}_R}{R^2} d\nu' &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{J}(\mathbf{r}) \int_{V_\sigma} \nabla' \cdot \frac{\mathbf{a}_R}{R^2} d\nu' \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{J}(\mathbf{r}) \underbrace{\int_{S_\sigma(V_\sigma)} \frac{\mathbf{a}_R}{R^2} \cdot d\mathbf{s}'}_{-4\pi} \\ &= \mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

Capítulo 6

Del campo eléctrico al campo magnético a través de la relatividad especial

Introducción

EN este artículo abordaremos la teoría de la relatividad especial con la finalidad de deducir el campo magnético como una manifestación «relativista» del campo eléctrico. La teoría de la relatividad especial o restringida de EINSTEIN se basa en la asunción de dos postulados básicos:

1. El principio de relatividad en sentido restringido de Galileo, enunciado literalmente por EINSTEIN en la forma [18]: *If, relative to K , K' is a uniformly moving co-ordinate system devoid of rotation, then natural phenomena run their course with respect to K' according to exactly the same general laws as with respect to K .* Este principio consiste en el hecho de que todos los eventos físicos transcurren de acuerdo a las mismas leyes físicas en todos los sistemas de referencia que se mueven con velocidad relativa uniforme, de tal suerte que no es posible detectar el propio movimiento únicamente a partir de mediciones realizadas sobre aquellos eventos físicos que ocurren en el propio sistema de referencia. El conjunto de sistemas que satisfacen esta condición se denominan inerciales.
2. La velocidad de la luz es la misma para todos los sistema inerciales, y su valor es de $c = 300000000$ [m/s].

6.1. Ecuaciones de transformación de LORENTZ

La formulación matemática de la teoría de relatividad restringida de EINSTEIN se resume en las denominadas ecuaciones de transformación de LORENTZ.

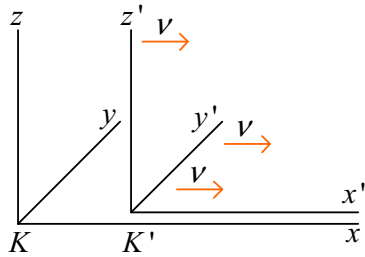


Figura 6.1: Par de sistemas inerciales.

Tales ecuaciones de transformación se definen con base a un par de sistemas inerciales, uno designado con la letra K , el cual suponemos unido a un observador en reposo, y otro, designado con la letra K' , que se mueve respecto del primero con una velocidad uniforme $\boldsymbol{\nu}$ –ver figura 6.1–. Sobre ambos sistemas inerciales se definen apropiadamente dos sistemas de coordenadas Cartesianas, (x, y, z) y (x', y', z') , tales que coincidan en el origen de referencia de los tiempos de ambos y que el movimiento de K' respecto de K resulte paralelo al eje x :

$$\boldsymbol{\nu} = \nu \mathbf{a}_x.$$

Las ecuaciones de transformación de LORENTZ se resumen en la tabla 6.1.

$x' = \gamma(x - \nu t)$	$x = \gamma(x' + \nu t')$
$y' = y$	$y = y'$
$z' = z$	$z = z'$
$t' = \gamma\left(t - \frac{\nu}{c^2}x\right)$	$t = \gamma\left(t' + \frac{\nu}{c^2}x'\right)$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\nu^2}{c^2}}}$$

Cuadro 6.1: Ecuaciones de transformación de LORENTZ.

Un par de consecuencias directas de la relatividad especial consisten en la contracción (de LORENTZ) de la longitud en la dirección de movimiento y la dilatación del tiempo para aquellos sistemas inerciales en movimiento cuando se les mide desde otro en reposo. Todo esto es por supuesto relativo, o sea: recíproco. Esto significa que si un observador A , quieto, observase el movimiento de un segundo observador

B , móvil respecto del primero, advertiría una contracción de la longitud (en la dirección de movimiento) del observador B y vería transcurrir el tiempo de éste más lentamente que el suyo propio. Pero, el observador B , desde el móvil, se verá a sí mismo quieto y hará exactamente las mismas observaciones anteriores respecto del observador A . ¿Quién tiene la razón? La respuesta es: ambos y ninguno a la vez, simplemente se trata de la imposibilidad natural de mantener alineados los respectivos dominios espacio-temporales.

Otra importantísima consecuencia de la teoría de la relatividad especial consiste en que la simultaneidad es también relativa: eventos simultáneos en un sistema inercial dado, ya no lo son para el resto de los sistemas inerciales que se mueven respecto de éste.

6.1.1. Contracción de LORENTZ

Supóngase que el observador B lee sobre el eje x' el valor de ℓ_0 justo cuando los orígenes de ambos sistemas coinciden, momento en el cual ambos observadores convienen en comenzar a medir el tiempo, esto es $t = t' = 0$. ¿Qué valor de x le asigna el observador A a ℓ_0 asumiendo que desde su punto de vista hace la lectura también en correspondencia de $t = 0$, admitiendo que ambos observadores son capaces de resolver el problema técnico que implica realizar la medición (lectura de ℓ_0) simultáneamente en su propio sistema de referencia?

Para contestar esta pregunta se utilizará la primera ecuación de la segunda columna de la tabla 6.1:

$$x = \gamma(\ell_0 + \nu t')$$

donde, como vemos, la lectura que se realiza desde el sistema K , a menos del factor γ , no solo depende de la variable espacial $x' = \ell_0$ sino también del tiempo t' asociado a este punto. ¿Cómo podemos conocer este tiempo t' ? Como sabemos que el observador A hace la lectura de x en $t = 0$, t' se puede despejar de la última ecuación de la misma columna:

$$\begin{aligned} t &= \gamma \left(t' + \frac{\nu}{c^2} \ell_0 \right) \\ 0 &= t' + \frac{\nu}{c^2} \ell_0 \\ t' &= - \frac{\nu}{c^2} \ell_0 \end{aligned}$$

y al sustituir, resulta:

$$\begin{aligned}x &= \gamma(\ell_0 + \nu t') \\x &= \gamma\left(\ell_0 - \frac{\nu^2}{c^2}\ell_0\right) \\x &= \frac{\ell_0}{\gamma}\end{aligned}$$

El observador A aprecia una longitud menor a ℓ_0 en un factor de $\frac{1}{\gamma}$, siendo γ tal que $1 \leq \gamma \leq \infty$. Esto es: el observador A mide $\frac{\ell_0}{\gamma}$ metros, mientras el observador B mide ℓ_0 metros. Este fenómeno se conoce como contracción de LORENTZ [19].

6.1.2. Dilatación temporal

Supóngase que para medir la duración t'_0 de algún evento en el origen de K' , el observador B dispone de un reloj en $x' = 0$, el cual sincroniza con dos relojes que el observador A ha dispuesto en $x = 0$ y en $x = \gamma\nu t'_0$. Tal sincronización es realizada justo cuando ambos orígenes coinciden. El observador B mide, según su reloj, un tiempo de t'_0 segundos de duración del mencionado evento. ¿Qué duración mide en sus relojes el observador A ? Para responder a esta pregunta utilizaremos la última ecuación de la columna de la derecha de la tabla 6.1:

$$t = \gamma\left(t'_0 + \frac{\nu}{c^2}x'\right)$$

poniendo $x' = 0$, sigue que:

$$t = \gamma t'_0$$

El observador A mide un tiempo de duración del evento en cuestión mayor de t'_0 en un factor de γ . Esto es: el observador A mide $\gamma t'_0$ segundos, mientras el observador B mide t'_0 segundos. El observador A ve como si el reloj del observador B se retrasara. Este fenómeno se conoce como dilatación temporal [19].

6.2. Transformación de velocidades, masas y fuerzas

6.2.1. Transformación de velocidades

Dado un objeto que se mueve con velocidad $\mathbf{v}' = v'_x \mathbf{a}_x + v'_y \mathbf{a}_y + v'_z \mathbf{a}_z$ respecto del observador B en el sistema K' , el observador A en el sistema K medirá una

velocidad $\mathbf{v} = v_x \mathbf{a}_x + v_y \mathbf{a}_y + v_z \mathbf{a}_z$, donde las componentes (v'_x, v'_y, v'_z) y (v_x, v_y, v_z) se relacionan entre si mediante las ecuaciones de transformación de velocidades que se muestran en el cuadro 6.2 [13] –ver figura 6.2–.

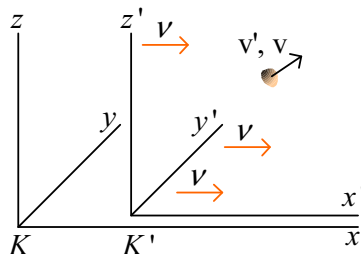


Figura 6.2: Objeto con velocidades relativas \mathbf{v}' y \mathbf{v} .

Cuadro 6.2: Transformación de velocidades.

$v_x = \frac{v'_x + \nu}{1 + (v'_x \nu / c^2)}$	$v'_x = \frac{v_x - \nu}{1 - (v_x \nu / c^2)}$
$v_y = \frac{v'_y}{\gamma [1 + (v'_y \nu / c^2)]}$	$v'_y = \frac{v_y}{\gamma [1 - (v_y \nu / c^2)]}$
$v_z = \frac{v'_z}{\gamma [1 + (v'_z \nu / c^2)]}$	$v'_z = \frac{v_z}{\gamma [1 - (v_z \nu / c^2)]}$

6.2.2. Transformación de la masa

La masa no es una invariante relativista: su valor es distinto dependiendo de la velocidad relativa de la partícula respecto del sistema de referencia desde la cual se la mide. Si se denota con m_0 la denominada masa en reposo de cierta partícula y siendo la velocidad de esta $\mathbf{v}' = v'_x \mathbf{a}_x + v'_y \mathbf{a}_y + v'_z \mathbf{a}_z$ respecto del sistema inercial K' , el observador B mide en el sistema K una masa par a:

$$\begin{aligned}
 m' &= \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v'}{c}\right)^2}} \\
 &= \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{(v'^2_x + v'^2_y + v'^2_z)}{c^2}}} \\
 &= \gamma_1 m_0
 \end{aligned}$$

donde $\gamma_1 = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, mientras que el observador A mide en el sistema K una masa par a:

$$\begin{aligned} m &= \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \\ &= \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{c^2}}} \\ &= \gamma_2 m_0 \end{aligned}$$

donde $\gamma_2 = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, siendo $\mathbf{v} = v_x \mathbf{a}_x + v_y \mathbf{a}_y + v_z \mathbf{a}_z$ la velocidad con que la partícula se mueve respecto del sistema K .

Usando las ecuaciones de transformación de velocidades dadas en el cuadro 6.2, en uno y otro sentido, se obtienen las ecuaciones de transformación de la masa que se presentan en el cuadro siguiente [10]:

Cuadro 6.3: Ecuaciones de transformación de la masa.

$m = \gamma \left(1 + \frac{v'_x v}{c^2}\right) m'$	$m' = \gamma \left(1 - \frac{v_x v'}{c^2}\right) m$
---	---

6.2.3. Transformación de las fuerzas

Como definición de fuerza debe tomarse la razón de cambio del momento por unidad de tiempo de una partícula:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

donde \mathbf{p} es el momento de la partícula y viene dado por: $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ [20].

Como la masa y la velocidad son cantidades físicas relativas, igualmente resulta ser lo la fuerza. En la tabla 6.4 se muestran las ecuaciones de transformación de las fuerzas.

6.3. Transformación de la ley de Coulomb

Cuadro 6.4: Transformación de la fuerza.

$F_x = F'_x + \frac{\nu}{c^2 + \nu'^2 x \nu} (\nu'_y F'_y + \nu'_z F'_z)$	$F'_x = F_x - \frac{\nu_x - \nu}{c^2 - \nu_x \nu} (\nu_y F_y + \nu_z F_z)$
$F_y = \frac{F'_y}{\gamma [1 + (\nu'_x \nu / c^2)]}$	$F'_y = \frac{F_y}{\gamma [1 - (\nu_x \nu / c^2)]}$
$F_z = \frac{F'_z}{\gamma [1 + (\nu'_x \nu / c^2)]}$	$F'_z = \frac{F_z}{\gamma [1 - (\nu_x \nu / c^2)]}$

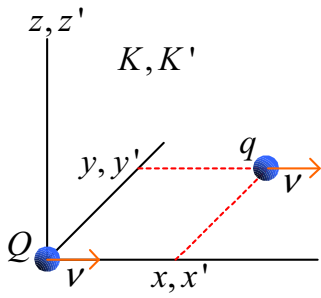


Figura 6.3: Cargas Q y q en reposo respecto de K' .

En esta sección se mostrará como la Ley de Coulomb en el sistema de referencia K' se transforma en si misma y en La Ley de fuerza de Ampere, especializada para cargas puntuales, en el sistema de referencia K .

Supóngase que en el sistema K' existen dos cargas puntuales en reposo: Q , puesta en el origen, y q , puesta en $(x', y', 0)$ –ver figura 6.3–. Ambas cargas yacen, como se puede inferir, en el plano $z' = 0$. La carga q experimenta una fuerza debido al campo electrostático \mathbf{E}' –ver figura 6.4(a)– producido por Q en el punto ocupado por q que vale:

$$\mathbf{F}' = q \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r'^2}}_{\mathbf{E}'} \mathbf{a}_{r'}$$

$$k_e \frac{Qq}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} (x' \mathbf{a}_{x'} + y' \mathbf{a}_{y'})$$

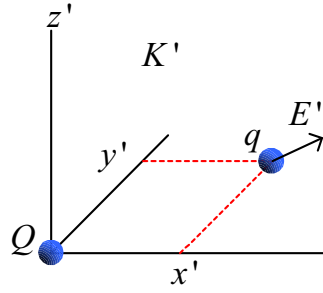
donde se ha puesto $k_e = 1/4\pi\epsilon_0$. Evidentemente:

$$F'_x = k_e \frac{Qq}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} x' \mathbf{a}_{x'}$$

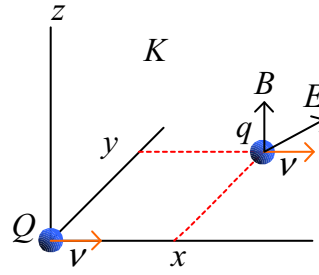
$$F'_y = k_e \frac{Qq}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} y' \mathbf{a}_{y'}$$

$$F'_z = 0$$

En el sistema de referencia K , el observador A medirá fuerzas y posiciones distintas, las cuales se pueden estimar usando las ecuaciones de transformación resumidas



(a) Las cargas Q y q se encuentran en reposo en el sistema K' .



(b) Las Cargas Q y q se mueven con velocidad v respecto del sistema de referencia K .

Figura 6.4: Campos observados desde los sistema de referencias K y K' .

en los cuadros 6.1 y 6.4. Antes de proceder a realizar estas transformaciones se simplificará el asunto asumiendo que éstas se harán justo cuando los orígenes de ambos sistemas de referencia coincidan, en cuyo caso se convendrá que $t' = t = 0$. Procediendo de esta forma se obtiene: $x' = \gamma x$, $y' = y$, $z = 0$, $F_x = F'_x$, $F_y = F'_y/\gamma$, y $F_z = 0$. De esta forma se podrá escribir:

$$F_x = k_e \frac{Qq}{[(\gamma x)^2 + y^2]^{\frac{3}{2}}} \gamma x \mathbf{a}_x$$

$$F_y = k_e \frac{Qq}{[(\gamma x)^2 + y^2]^{\frac{3}{2}}} \frac{y}{\gamma} \mathbf{a}_y$$

$$F_z = 0$$

La componente F_y se puede expandir de la siguiente manera¹:

$$\begin{aligned} F_y &= k_e \frac{Qq}{[(\gamma x)^2 + y^2]^{\frac{3}{2}}} \frac{y}{\gamma} \mathbf{a}_y \\ &= k_e \frac{Qq}{[(\gamma x)^2 + y^2]^{\frac{3}{2}}} \gamma y \mathbf{a}_y - k_e \frac{Qq}{[(\gamma x)^2 + y^2]^{\frac{3}{2}}} \gamma \frac{v^2}{c^2} y \mathbf{a}_y \\ &= k_e \frac{Qq}{[(\gamma x)^2 + y^2]^{\frac{3}{2}}} \gamma y \mathbf{a}_y + \frac{k_e}{c^2} \frac{Qqv}{[(\gamma x)^2 + y^2]^{\frac{3}{2}}} \gamma y \mathbf{v} \times \mathbf{a}_z \\ &= k_e \frac{Qq}{[(\gamma x)^2 + y^2]^{\frac{3}{2}}} \gamma y \mathbf{a}_y + \mathbf{v} \times k_m \frac{Qqv}{[(\gamma x)^2 + y^2]^{\frac{3}{2}}} \gamma y \mathbf{a}_z \end{aligned}$$

¹Poniendo $\beta = \frac{v}{c}$, se tiene que $\gamma - \gamma\beta^2 = \gamma(1 - \beta^2) = \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta^2)^{1/2}} = \frac{1}{\gamma}$.

donde $k_m = k_e/c^2 = \mu_0/4\pi^2$. Juntando las componentes F_x y F_y obtenemos³:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= q \left\{ k_e \frac{Q}{[(\gamma x)^2 + y^2]^{\frac{3}{2}}} (\gamma x \mathbf{a}_x + \gamma y \mathbf{a}_y) + \boldsymbol{\nu} \times k_m \frac{Qv}{[(\gamma x)^2 + y^2]^{\frac{3}{2}}} \gamma y \mathbf{a}_z \right\} \\ &= q \left\{ \underbrace{k_e \frac{Q (\gamma x \mathbf{a}_x + \gamma y \mathbf{a}_y)}{[(\gamma x)^2 + y^2]^{\frac{3}{2}}}}_{\mathbf{E}} + \boldsymbol{\nu} \times \underbrace{k_m \frac{Q \boldsymbol{\nu} \times (\gamma x \mathbf{a}_x + \gamma y \mathbf{a}_y)}{[(\gamma x)^2 + y^2]^{\frac{3}{2}}}}_{\mathbf{B}} \right\} \end{aligned} \quad (6.1)$$

donde \mathbf{E} y \mathbf{B} son los campos eléctrico y magnético, respectivamente, producidos por Q desde el punto de vista del observador en el sistema K –ver figura 6.4(b)–.

La ecuación (6.1) se puede reescribir de una manera más conveniente tomando en cuenta que:

$$\begin{aligned} \frac{\gamma x \mathbf{a}_x + \gamma y \mathbf{a}_y}{[(\gamma x)^2 + y^2]^{\frac{3}{2}}} &= \frac{(x \mathbf{a}_x + y \mathbf{a}_y) \gamma}{\left(\frac{x^2}{1-\beta^2} + y^2\right)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{(x \mathbf{a}_x + y \mathbf{a}_y) \frac{1}{(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}}}{\left(\frac{x^2 + y^2 - y^2 \beta^2}{1-\beta^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{\mathbf{r} (1 - \beta^2)}{r^3 \left(1 - \frac{y^2 \beta^2}{r^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{\mathbf{a}_r (1 - \beta^2)}{r^2 \left(1 - \frac{y^2 \beta^2}{r^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

donde $\mathbf{r} = x \mathbf{a}_x + y \mathbf{a}_y$, $r = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$ y $\mathbf{a}_r = \mathbf{r}/r$. De esta suerte la ecuación (6.1) se puede reescribir de la manera:

$$\mathbf{F} = q \left\{ \underbrace{k_e \frac{Q \mathbf{a}_r}{r^2}}_{\mathbf{E}} + \boldsymbol{\nu} \times \underbrace{k_m \frac{Q \boldsymbol{\nu} \times \mathbf{a}_r}{r^2}}_{\mathbf{B}} \right\} f \quad (6.2)$$

donde $f = (1 - \beta^2) / (1 - y^2 \beta^2 / r^2)^{3/2}$.

La ecuación (6.2), a menos del factor relativista f , se conoce como fuerza de LORENTZ y comprende la ley de COULOMB y la ley de fuerzas de AMPERE, respectivamente. El factor relativista f para velocidades pequeñas se puede considerar prácticamente igual a la unidad: $f \approx 1$ para $\nu \ll c$.

² $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$

³ $\boldsymbol{\nu} \times (\gamma x \mathbf{a}_x + \gamma y \mathbf{a}_y) = \nu \mathbf{a}_x \times (\gamma x \mathbf{a}_x + \gamma y \mathbf{a}_y) = \nu \gamma y \mathbf{a}_z$

6.4. Conclusión

De todo lo anterior se puede apreciar que el campo magnético ha «aparecido» como una consecuencia de haber observado la fuerza Coulombiana entre dos cargas desde un sistema inercial respecto del cual las cargas no se encuentran en reposo. Esto sugiere que la naturaleza del campo magnético no es distinta de la del campo eléctrico: el campo magnético es, precisamente, una manifestación relativista del campo eléctrico.

Capítulo 7

Campos variables en el tiempo

7.1. Ley de inducción de FARADAY

En los materiales con una conductividad distinta de cero, se inducen corrientes de conducción si se «sumergen» en un campo magnético variable en el tiempo. Con relación a la figura 7.1, FARADAY (alrededor de 1831) observó que al variar el campo de inducción magnética \mathbf{B} se engendraba una corriente en la espira conductora. En particular, tomando como referencia las direcciones del campo \mathbf{B} y la corriente I indicadas en la figura 7.1, se observa que al incrementarse B la corriente decrece, y viceversa, al disminuir B la corriente aumenta. El establecimiento de esta corriente se atribuye a la «inducción» de una fuerza capaz de realizar trabajo sobre los portadores de carga del medio conductor. El trabajo por unidad de carga que realiza esta fuerza, que bien pudiera llamarse trabajo, se denomina fuerza *electro-motriz*, abreviadamente *f.e.m.*, y se define como sigue:

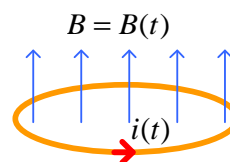


Figura 7.1: Espira conductora en presencia de un campo magnético variable en el tiempo.

$$f.e.m. = \oint \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} \quad (7.1)$$

En la Ecuación (7.1) se asume que un campo de naturaleza eléctrica, \mathbf{E} , es responsable de este trabajo. Ciertamente, tal campo eléctrico no es de naturaleza conservativa.

La relación cuantitativa establecida experimentalmente por FARADAY entre la variación temporal del campo magnético \mathbf{B} y la «fuerza electro-motriz» tiene la

siguiente forma:

$$\underbrace{\oint_{C_{esp}} \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell}}_{f.e.m.} = - \frac{d}{dt} \Phi_{S_{esp}}^B$$

$$f.e.m. = - \frac{d}{dt} \int_{S_{esp}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} \quad (7.2)$$

La Ecuación (7.2) debe leerse de la siguiente manera: dado un campo magnético \mathbf{B} , variable en el tiempo, y prefijado un cierto camino cerrado en la región de existencia del campo magnético, imaginario o real, que bien pudiera ser una espira conductora C_{esp} , sobre tal camino se induce un campo eléctrico capaz de realizar un trabajo por unidad de carga, a lo largo del circuito, par al flujo de la razón de cambio temporal del campo magnético a través de una cualquiera de las superficies definidas por el camino mismo. La relación espacial entre los campos inducido $-\mathbf{E}$ e inductor $-\partial\mathbf{B}/\partial t$ es de mutua ortogonalidad. El signo menos en la Ec. (7.2) se conoce como **Ley de LENZ**. La ley de LENZ establece que la *f.e.m.* que se induce en la espira por la acción del flujo magnético primario, o exterior, es tal que la corriente engendrada produce un flujo magnético secundario contrario al flujo magnético primario, produciendo un flujo resultante menor [21].

7.1.1. Conductor que se mueve en un campo magnético

Si un conductor se mueve con velocidad $\boldsymbol{\nu}$ en una región en la que existe un campo magnético \mathbf{B} t -invariante y uniforme (ver Fig. 7.2), todos los portadores de carga dentro del conductor experimentan una fuerza dada por:

$$\mathbf{F} = q(\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{B}) \quad (7.3)$$

La Ecuación (7.3) forma parte de una expresión de la fuerza aún más general, denominada **fuerza de LORENTZ**, la cual tiene en cuenta la acción de los campos tanto eléctrico como magnético:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \boldsymbol{\nu} \times \mathbf{B}) \quad (7.4)$$

La componente magnética de la Fuerza de LORENTZ por unidad de carga:

$$\frac{\mathbf{F}}{q} = \boldsymbol{\nu} \times \mathbf{B}$$

se puede considerar, desde el punto de vista de la propia carga, como una suerte de campo eléctrico: $\mathbf{E} = \boldsymbol{\nu} \times \mathbf{B}$, de modo que para un circuito en el que una o más

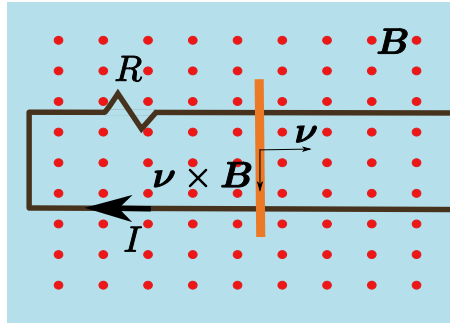


Figura 7.2: Inducción por movimiento. Cierta barra conductora se desliza a velocidad ν sobre un par de rieles, conductores también, en una región en la que existe cierto campo B uniforme. Todos los portadores de carga en la barra experimentan una fuerza por unidad de carga dada por $\nu \times B$. Solo los electrones podrán moverse dando lugar a una corriente I que queda limitada por la resistencia R en serie con el circuito.

de sus partes, o todo él, presentan un movimiento relativo respecto de un campo magnético exterior, se puede definir una trabajo por unidad de carga, o *f.e.m.*, no nulo, dado por:

$$\oint_{\Gamma} \underbrace{\frac{F}{q}}_E \cdot d\ell = \oint_{\Gamma} (\nu \times B) \cdot d\ell$$

$$\underbrace{\oint_{\Gamma} E \cdot d\ell}_{f.e.m.} = \oint_{\Gamma} (\nu \times B) \cdot d\ell$$

7.1.2. Caso general de la inducción

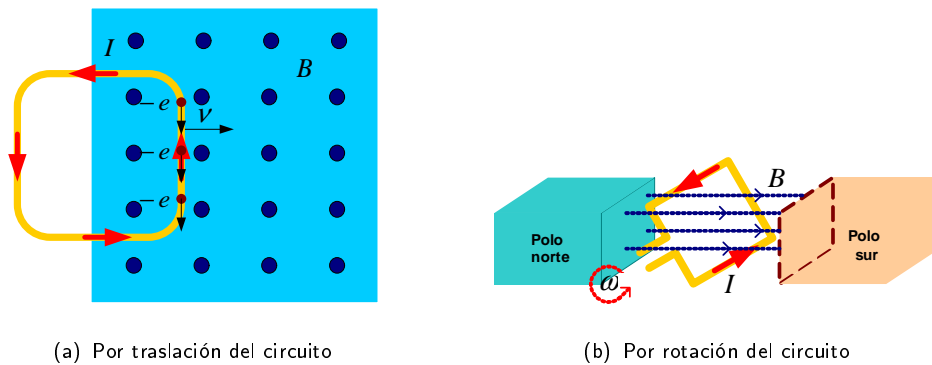


Figura 7.3: Mecanismos de inducción de la *f.e.m.* de generador o de movimiento.

Muy corrientemente se suele separar la *f.e.m.* inducida por la variación temporal del campo magnético de la inducida por el movimiento relativo del circuito, denomi-

nando *f.e.m* de *transformación* la primera, y *f.e.m* de *generador*, o de *movimiento*, la segunda [4]:

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \underbrace{- \int_{S_{\Gamma}} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s}}_{f.e.m. \text{ de transformación}} + \underbrace{\oint_{\Gamma} (\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{B}) \cdot d\boldsymbol{\ell}}_{f.e.m. \text{ de generador}} \quad (7.5)$$

También se suelen englobar ambas *f.e.m.* en una única ecuación

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = - \frac{d}{dt} \int_{S_{\Gamma}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} \quad (7.6)$$

donde queda sobrentendido que el flujo $\int_{S_{\Gamma}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$ puede variar en el tiempo porque el campo magnético sea t -variante: $\mathbf{B} = \mathbf{B}(t)$, o el circuito se deforme –Fig. 7.2–, se traslade –Fig. 7.3(a)–, o rote –Fig. 7.3(b)–, en el tiempo: $S_{\Gamma} = S_{\Gamma}(t)$, o ambas cosas.

Para comprobar el carácter general de la Ec. (7.6) procederemos como sigue partiendo de la forma compacta

$$f.e.m. = - \frac{d\Phi}{dt}$$

donde $\Phi = \int_{S_{\Gamma}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$, siendo S_{Γ} una cualquiera de las superficies definidas por el circuito Γ en el que se desea determinar la *f.e.m.*, pudiendo ocurrir que tanto el campo magnético $\mathbf{B} = \mathbf{B}(t)$, como la superficie $S_{\Gamma} = S_{\Gamma}(t)$ varíen con el tiempo.

Se tiene

$$\frac{d\Phi}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left[\int_{S_{\Gamma}(t+\Delta t)} \mathbf{B}(t+\Delta t) \cdot d\mathbf{s} - \int_{S_{\Gamma}(t)} \mathbf{B}(t) \cdot d\mathbf{s} \right] \quad (7.7)$$

donde $S_{\Gamma}(t)$ y $S_{\Gamma}(t+\Delta t)$ son las superficies definidas por el mismo circuito en los instantes t y $t+\Delta t$, respectivamente, las cuales pueden ser, en general, distintas (ver Fig. 7.4).

Si en el intervalo Δt el circuito ha cambiado, por deformación, traslación o rotación, las superficies $S_{\Gamma}(t)$ y $S_{\Gamma}(t+\Delta t)$ en conjunto con una superficie que denotaremos S_{lat} , la cual se puede pensar como el área barrida por la deformación, traslación o rotación del circuito en el intervalo Δt , conforman una superficie cerrada $S = S_{\Gamma}(t) + S_{\Gamma}(t+\Delta t) + S_{lat}$. Ahora bien, si el campo magnético varía continuamente y con suavidad se podrá expandir de la forma: $\mathbf{B}(t+\Delta t) = \mathbf{B}(t) + \frac{\partial \mathbf{B}(t)}{\partial t} \Delta t + \text{T.O.S.}$, y al despreciar los términos de orden superior, la Ec. (7.7) asume la forma

$$\frac{d\Phi}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left[\int_{S_{\Gamma}(t+\Delta t)} \mathbf{B}(t) \cdot d\mathbf{s} + \int_{S_{\Gamma}(t+\Delta t)} \frac{\partial \mathbf{B}(t)}{\partial t} \Delta t \cdot d\mathbf{s} - \int_{S_{\Gamma}(t)} \mathbf{B}(t) \cdot d\mathbf{s} \right] \quad (7.8)$$

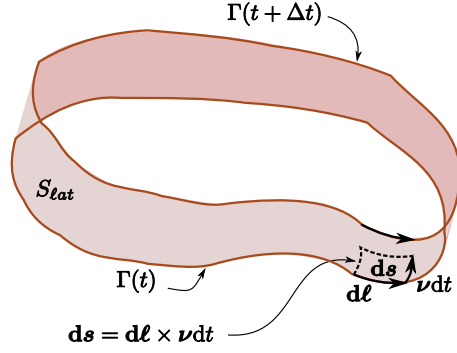


Figura 7.4: Circuito que cambia por deformación, traslación o rotación. En t el circuito es de la forma $\Gamma(t)$ y tiene asociada una familia de superficies abiertas $S_{\Gamma}(t)$. En $t + \Delta t$ el circuito es de la forma $\Gamma(t + \Delta t)$ y tiene asociada una familia de superficies abiertas $S_{\Gamma}(t + \Delta t)$. En el intervalo Δt el circuito «barre» una superficie S_{lat} . Un diferencial de superficie sobre S_{lat} tendrá la forma de $\mathbf{ds} = \mathbf{dl} \times \boldsymbol{\nu} dt$ si sus dos lados se toman paralelos a Γ y a la velocidad $\boldsymbol{\nu}$, respectivamente, como se indica.

tomando en cuenta que $\int_{V(S_{\Gamma})} \nabla \cdot \mathbf{B}(t) d\nu = \int_{S_{\Gamma}(t+\Delta t)} \mathbf{B}(t) \cdot \mathbf{ds} - \int_{S_{\Gamma}(t)} \mathbf{B}(t) \cdot \mathbf{ds} + \int_{S_{lat}} \mathbf{B}(t) \cdot \mathbf{ds}_{lat}$ y que $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, resulta

$$\frac{d\Phi}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left[- \int_{S_{lat}} \mathbf{B}(t) \cdot \underbrace{\mathbf{ds}_{lat}}_{\mathbf{dl} \times \boldsymbol{\nu} dt} + \left(\int_{S_{\Gamma}(t+\Delta t)} \frac{\partial \mathbf{B}(t)}{\partial t} \cdot \mathbf{ds} \right) \Delta t \right] \quad (7.9)$$

En la Ecuación (7.9) el diferencial de superficie sobre S_{lat} tendrá la forma $\mathbf{ds}_{lat} = \mathbf{dl} \times \boldsymbol{\nu} dt$ si sus dos lados se toman paralelos a Γ y a la velocidad $\boldsymbol{\nu}$, respectivamente, como se muestra en la Fig. 7.4, y la integral de superficie se podrá expresar de la forma $\int_{S_{lat}} = \oint_{\Gamma(t)} \int_0^{\Delta t}$:

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left[- \oint_{\Gamma(t)} \int_0^{\Delta t} \mathbf{B}(t) \cdot \mathbf{dl} \times \boldsymbol{\nu} dt + \left(\int_{S_{\Gamma}(t+\Delta t)} \frac{\partial \mathbf{B}(t)}{\partial t} \cdot \mathbf{ds} \right) \Delta t \right] \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left[- \left(\oint_{\Gamma(t)} \mathbf{B}(t) \cdot \mathbf{dl} \times \boldsymbol{\nu} \right) \Delta t + \left(\int_{S_{\Gamma}(t+\Delta t)} \frac{\partial \mathbf{B}(t)}{\partial t} \cdot \mathbf{ds} \right) \Delta t \right] \\ &= - \oint_{\Gamma(t)} \mathbf{B}(t) \cdot \mathbf{dl} \times \boldsymbol{\nu} + \int_{S_{\Gamma}(t)} \frac{\partial \mathbf{B}(t)}{\partial t} \cdot \mathbf{ds} \end{aligned} \quad (7.10)$$

Usando la propiedad $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} \times \mathbf{A}$, se obtiene finalmente:

$$f.e.m. = - \frac{d\Phi}{dt} = \oint_{\Gamma(t)} \boldsymbol{\nu} \times \mathbf{B}(t) \cdot \mathbf{dl} - \int_{S_{\Gamma}(t)} \frac{\partial \mathbf{B}(t)}{\partial t} \cdot \mathbf{ds} \quad (7.11)$$

7.1.3. Forma diferencial de la ley de inducción de FARADAY

Al tomar el límite $S_\Gamma \rightarrow 0$, de modo de reducir la superficie S_Γ y su contorno Γ a un punto (macroscópico), y usando el Teorema de STROKE, la Ec. (7.6) da lugar a:

$$\begin{aligned}\lim_{\Gamma \rightarrow 0} \oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} &= \lim_{S_\Gamma \rightarrow 0} -\frac{d}{dt} \int_{S_\Gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} \\ \lim_{S_\Gamma \rightarrow 0} \int_{S_\Gamma} \nabla \times \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} &= \lim_{S_\Gamma \rightarrow 0} -\frac{d}{dt} \int_{S_\Gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} \\ \int_{S_\Gamma \rightarrow 0} \nabla \times \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} &= -\frac{d}{dt} \int_{S_\Gamma \rightarrow 0} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}\end{aligned}$$

y en la medida que la superficie S_Γ se contrae, las cantidades subintegrales $\nabla \times \mathbf{E}$ y \mathbf{B} , siendo funciones de buen comportamiento, tienden a comportarse como cantidades constantes en los puntos de S_Γ , pudiéndose factorizar de sus respectivas integrales:

$$\begin{aligned}\int_{S_\Gamma \rightarrow 0} \nabla \times \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} &= -\frac{d}{dt} \int_{S_\Gamma \rightarrow 0} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} \\ \nabla \times \mathbf{E} \cdot \int_{S_\Gamma \rightarrow 0} d\mathbf{s} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \int_{S_\Gamma \rightarrow 0} d\mathbf{s} \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\end{aligned}\tag{7.12}$$

La Ecuación (7.12) se conoce como Ley de Inducción de FARADAY en forma diferencial o puntual. El campo eléctrico definido mediante la Ec. (7.12) es un campo de naturaleza solenoidal, o sea un campo no conservativo, de líneas cerradas. Con la Ec. (7.12) se completa el conocimiento del campo eléctrico. Se reconoce así, que el campo eléctrico posee dos componentes: una componente irrotacional, o estática, \mathbf{E}_i , y una componente solenoidal, o dinámica, \mathbf{E}_s : $\mathbf{E} = \mathbf{E}_i + \mathbf{E}_s$, donde los campos \mathbf{E}_i y \mathbf{E}_s quedan definidos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E}_i &= 0 & \nabla \times \mathbf{E}_s &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{E}_i &= \frac{\rho_\nu}{\varepsilon_0} & \nabla \cdot \mathbf{E}_s &= 0\end{aligned}$$

Normalmente, sin embargo, se describe el campo eléctrico de la siguiente manera concisa:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\tag{7.13}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_\nu}{\varepsilon_0}\tag{7.14}$$

o equivalentemente (en el mundo macroscópico):

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (7.15)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_\nu \quad (7.16)$$

donde se debe distinguir la naturaleza distinta de las densidades volumétricas de cargas que aparecen en las Ecs. (8.22) y (8.26): la primera incluye todo tipo de cargas (libres y ligadas), la segunda incluye solo las cargas libres.

7.2. Corriente de desplazamiento de MAXWELL

En el Cuadro 7.1 se muestra el conjunto de leyes experimentales conocidas para la época de MAXWELL escritas usando la notación moderna que debemos principalmente a HEAVISIDE y GIBBS.

Cuadro 7.1: Resumen del conocimiento acumulado hasta la época de Maxwell.

	FORMAS DIFERENCIALES O PUNTUALES	FORMAS INTEGRALES O GLOBALES
<i>Ley de inducción de Faraday</i>	$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	$\oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = -\frac{d}{dt} \int_{S(\Gamma)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$
<i>Ley de Gauss</i>	$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_\nu$	$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = \int_{V(S)} \rho_\nu d\nu$
<i>Ley circuital de Ampere</i>	$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$	$\oint_{\Gamma} \mathbf{H} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \int_{S(\Gamma)} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s}$
	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0$
<i>Ecuaciones constitutivas</i>	$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \mathbf{B} = \mu \mathbf{H},$ $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$	
<i>Ecuación de continuidad de la corriente</i>	$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho_\nu}{\partial t}$	$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d}{dt} \int_{V(S)} \rho_\nu d\nu$

MAXWELL observó la inconsistencia existente entre las ecuaciones de la ley de AMPERE y de continuidad de la corriente: al tomar la divergencia de la primera se

llega a un resultado incoherente con la segunda: $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = 0 = \nabla \cdot \mathbf{J}$, pero, a su vez: $\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho_\nu}{\partial t}$. MAXWELL debió corregir la Ley de AMPERE añadiendo **algo** al segundo miembro: $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \mathbf{algo}$, de tal suerte que al tomar la divergencia de esta ecuación resultase $\nabla \cdot \mathbf{J} = -\nabla \cdot \mathbf{algo}$. Al comparar este resultado con la ecuación de continuidad de la corriente tendría que ser $\nabla \cdot \mathbf{algo} = -\frac{\partial \rho_\nu}{\partial t}$. Facilmente se puede deducir, usando la Ley de GAUSS ($\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_\nu$) que $\mathbf{algo} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ y:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (7.17)$$

donde el nuevo término $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ se denomina densidad de corriente de desplazamiento .

7.2.1. Ecuaciones de MAXWELL

MAXWELL concibió la densidad de corriente de desplazamiento por la vía del pensamiento, y no experimentalmente, y al hacerlo estaba postulando la teoría más completa de la Física: la Teoría Electromagnética. El conjunto de ecuaciones:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (7.18)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_\nu \quad (7.19)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (7.20)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (7.21)$$

se conocen como las Ecuaciones de MAXWELL. Tales ecuaciones son ecuaciones del punto o diferenciales y permiten explicar todos los fenómenos electromagnéticos macroscópicos de la naturaleza. Las Ecuaciones de MAXWELL contienen el concepto de acción contigua, en contraposición con la acción a distancia, pues correlacionan la razón de variación espacial con la razón de cambio por unidad de tiempo de los campos, lo cual implica que la evolución de éstos no puede sino ocurrir mediante pequeños (infinitesimales) pasos espaciales y temporales.

7.2.2. Potenciales retardados

De la Ecuación (8.4) se desprende que $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, solo que $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \neq \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{R} dV'$. El vector potencial magnético ahora será función del tiempo y su valor en un punto dado será función de la distribución de corriente en un instante de tiempo anterior, el necesario para que el efecto de $\mathbf{J}(\mathbf{r}')$ (o sea \mathbf{A}) mediante una «acción contigua» se manifieste en el punto de observación \mathbf{r} . Un expresión apropiada para \mathbf{A} , tomando

en cuenta este retardo, y asumiendo que la perturbación \mathbf{A} «viaja» de un punto a otro a una velocidad ν_p es

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t - R/\nu_p)}{R} d\nu' \quad (7.22)$$

Otra consecuencia de las Ecuaciones de MAXWELL es que $\mathbf{E} \neq -\nabla V$, ya que $\nabla \times \mathbf{E} \neq 0$. Sin embargo al sustituir en la Ec. (11.25) $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{A} \end{aligned}$$

intercambiando los operadores $\frac{\partial}{\partial t} \longleftrightarrow \nabla \times$

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= \nabla \times \left(-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \\ \nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) &= 0 \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} \underbrace{\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}}_{\mathbf{E}_i} &= -\nabla V \\ \mathbf{E} &= \underbrace{-\nabla V}_{\mathbf{E}_i} - \underbrace{\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}}_{\mathbf{E}_s} \end{aligned}$$

donde $\mathbf{E}_s = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ y $\mathbf{E}_i = -\nabla V$ son las componentes solenoidal, o «dinámica», e irrotacional, o cuasiestática, del campo eléctrico, respectivamente.

Ciertamente el potencial $V = V(\mathbf{r}, t) \neq \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{V'} \frac{\rho_\nu(\mathbf{r}')}{R} d\nu'$ y su causa $-\rho_\nu(\mathbf{r}', t)$ no suceden simultáneamente: primero sucede la causa y luego sucede el efecto, de modo que al observar el potencial en \mathbf{r} en un instante de tiempo t dado, la causa que lo ha engendrado ha debido ocurrir un instante de tiempo anterior, dígase $t' = t - R/\nu_p$, donde ν_p es la velocidad con que la acción de las fuentes se propaga hacia los puntos contiguos alrededor y $\frac{R}{\nu_p}$ es el tiempo que tarda en ir del punto fuente \mathbf{r}' al punto de observación \mathbf{r} :

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{V'} \frac{\rho_\nu(\mathbf{r}', t - R/\nu_p)}{R} d\nu' \quad (7.23)$$

Las funciones de las Ecs. (7.22) y (7.23) se conocen como los Potenciales Retardados.

7.3. Revisión del concepto de energía magnética

En el capítulo previo definimos la densidad de energía magnética para medios lineales mediante la fórmula $w_m = \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}$ y advertimos que su deducción no podía ser posible hasta haber completado el estudio de la Ley de Inducción de FARADAY, tema que finalmente hemos tratado. Procederemos de seguido a deducir esta expresión usando como referencia un cuerpo conductor de la forma que se indica en la Fig. 7.5 el cual se conecta eléctricamente por los extremos 1 y 2 con un generador que forzará «suavemente» una corriente constante I , partiendo de un valor nulo.

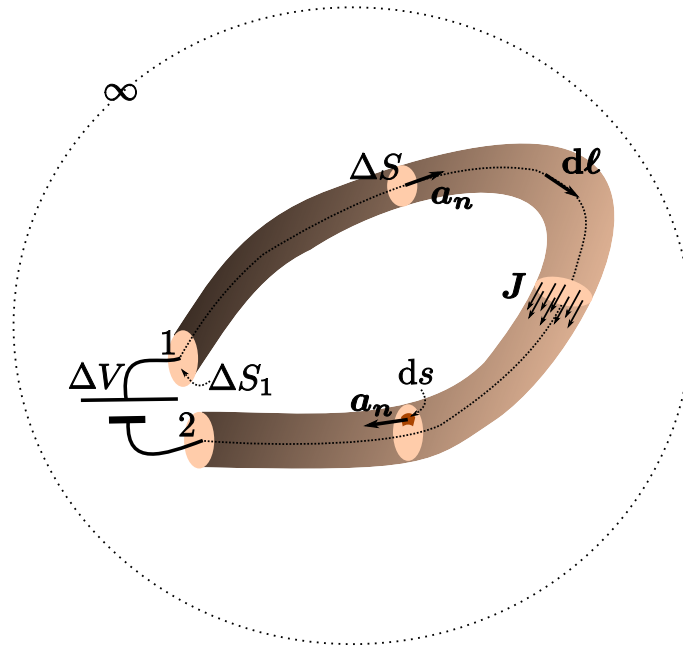


Figura 7.5: Cuerpo conductor sobre el que se forzará una corriente I DC de manera suave, y que servirá de base para la deducción de la expresión $w_m = \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}$.

En $t = 0$ el generador empezará a inyectar cargas por uno de los extremos y las evacuará por el otro, de tal manera de realizar un trabajo $dw = \Delta V dq$ sobre la carga diferencial dq , siendo ΔV la diferencia de potencial entre los extremos 1 y 2 del conductor. Este diferencial de carga se incorporará a la corriente i que empezará a circular a través de la sección ΔS_1 del conductor: $i = \int_{\Delta S_1} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s}$. Recordemos que hemos asumido que la corriente será inicialmente nula y por tanto la misma será una función del tiempo $i = i(t)$, y que la haremos variar muy lentamente, o suavemente, hasta alcanzar un valor constante I . Anticiparemos que esto ocurrirá después de T s. Durante la evolución de $i(t)$ se inducirá un campo \mathbf{E}_s dado por $\mathbf{E}_s = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$, donde \mathbf{A} vendría dado por la Ec. (7.22). Si se asume que la evolución temporal de \mathbf{J} sea suficientemente lenta, dígame cuasiestática, se podrán despreciar

los retardos y aproximar \mathbf{A} como $\mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V_C} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t)}{R} d\nu'$, donde V_C es el volumen del conductor. En este punto es necesario precisar un poco mejor el carácter suave de la evolución temporal de la corriente. Cuando exigimos una variación lenta de la corriente lo hacemos porque deseamos que la derivada temporal $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ parta de un valor nulo (cuando la corriente alcance el valor constante I , la misma derivada será igualmente nula). Cabe preguntarse el porqué de esta premisa tan restrictiva y particular. La respuesta es que no deseamos malgastar la energía del generador en las variaciones del momento de las cargas ni en radiación, sino utilizarla toda solo en la creación del campo magnético de I .

Volviendo a la expresión $dw = \Delta V dq$, admitiremos que este trabajo debe hacerse para vencer la *f.e.m.* inducida contraria, y su valor mínimo, despreciando las pérdidas óhmicas en el conductor, vale

$$\Delta V dq = - \int_1^2 \mathbf{E}_s dq \cdot d\boldsymbol{\ell} \quad (7.24)$$

y como $dq = i(t)dt$

$$dq = \left(\int_{\Delta S} \mathbf{J}(t) \cdot d\mathbf{s} \mathbf{a}_n \right) dt \quad (7.25)$$

Reemplazando la Ec. (7.25) en la Ec. (7.24) se obtiene

$$dw = - \int_1^2 \mathbf{E}_s \left(\int_{\Delta S} \mathbf{J}(t) \cdot d\mathbf{s} \mathbf{a}_n \right) dt \cdot d\boldsymbol{\ell}$$

tomando $d\boldsymbol{\ell}$ y \mathbf{a}_n colineales con \mathbf{E} (y por ende con \mathbf{J}), siendo $\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$, de modo que las integrales anidadas \int_1^2 y $\int_{\Delta S}$ equivalgan a la integral sobre el volumen V_C del conductor \int_{V_C} , el trabajo diferencial realizado se podrá escribir como

$$dw = \left(\int_{V_C} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot \mathbf{J} dv \right) dt$$

De esta manera

$$\frac{dw}{dt} = \int_{V_C} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot \mathbf{J} dv$$

representa la rapidez con que la fuente externa al conductor crea el campo magnético, o la rapidez con que la fuente transfiere su energía al campo magnético. Cuando la corriente alcance su valor estable, lo cual ocurrirá, según lo anticipamos, a los T segundos, el campo magnético creado albergará una energía par a

$$W_m = \int_0^T \left(\int_{V_C} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot \mathbf{J} dv \right) dt \quad (7.26)$$

Ahora bien, como $\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{J}) = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot \mathbf{J} + \mathbf{A} \cdot \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t}$ se podrá escribir

$$\int_0^T \left(\int_{V_C} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot \mathbf{J} dv \right) dt = \int_{V_C} \mathbf{A} \cdot \mathbf{J} dv \Big|_0^T - \int_0^T \left(\int_{V_C} \mathbf{A} \cdot \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} dv \right) dt$$

y como $\int_{V_C} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot \mathbf{J} \, dv = \int_{V_C} \mathbf{A} \cdot \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} \, dv$, lo cual comprobaremos más adelante, sigue que

$$W_m = \frac{1}{2} \int_{V_C} \mathbf{A} \cdot \mathbf{J} \, dv \Big|_0^T$$

y si $\int_{V_C} \mathbf{A} \cdot \mathbf{J} \, dv \Big|_0 = 0$, entonces

$$W_m = \frac{1}{2} \int_{V_C} \mathbf{A} \cdot \mathbf{J} \, dv \quad (7.27)$$

representa la energía magnética almacenada en la distribución de corriente y utilizada para crear el campo magnético correspondiente.

Ahora bien, expandiendo el volumen de integración de la Ec. (7.27) hasta incorporar todo el espacio, reemplazando \mathbf{J} por $\nabla \times \mathbf{H}$, utilizando la identidad vectorial $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{H}$, y sustituyendo $\nabla \times \mathbf{A}$ por \mathbf{B} se obtiene

$$W_m = \frac{1}{2} \int_{V_\infty} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \, dv \quad (7.28)$$

porque al convertir la integral de volumen de $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{H})$ en la integral de flujo de $\mathbf{A} \times \mathbf{H}$ a través de la superficie cerrada en el infinito, ésta se desvanece, toda vez que el vector $\mathbf{A} \times \mathbf{H}$ decrece con el inverso del cubo de la distancia ($\mathbf{A} \times \mathbf{H} \propto \frac{1}{r^3}$), mientras que la superficie crece con el cuadrado ($d\mathbf{s} \propto r^2$).

La cantidad $\frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}$ tiene dimensiones (Julios/m³) de una densidad volumétrica de energía, y se la denomina densidad volumétrica de energía magnética:

$$w_m = \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \quad (7.29)$$

Comprobación

Se desea comprobar que

$$\int_{V_C} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot \mathbf{J} \, dv = \int_{V_C} \mathbf{A} \cdot \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} \, dv \quad (7.30)$$

Para ello partiremos poniendo $\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{H}$

$$\begin{aligned} \mathbf{J} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} &= \nabla \times \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \\ \mathbf{A} \cdot \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} &= \mathbf{A} \cdot \nabla \times \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \end{aligned}$$

y usando la identidad vectorial $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{B}$

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} &= \nabla \cdot \left(\mathbf{H} \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \mathbf{A} \cdot \nabla \times \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= \nabla \cdot \left(\mathbf{A} \times \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right) + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \cdot \mathbf{B} \end{aligned}$$

Al sustituir estas expresiones en la Ec. (7.30) y al expandir el volumen de integración desde V_C hasta incluir todos los puntos del universo, y al usar el teorema de la Divergencia para convertir las integrales de volumen de los términos $\nabla \cdot (\mathbf{H} \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t})$ y $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t})$ en integrales de flujo a través de la superficie en el infinito que encierra el universo, resulta

$$\begin{aligned}\int_{V_\infty} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot \mathbf{J} \, dv &= \int_{V_\infty} \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \, dv \\ \int_{V_\infty} \mathbf{A} \cdot \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} \, dv &= \int_{V_\infty} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \cdot \mathbf{B} \, dv\end{aligned}$$

ya que $\mathbf{A} \propto \frac{1}{r}$, $\mathbf{H} \propto \frac{1}{r^2}$ y $ds \propto r^2$ las integrales $\oint_{S_\infty} \mathbf{H} \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s}$ y $\oint_{S_\infty} \mathbf{A} \times \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s}$ son nulas.

Si el medio es lineal y no posee memoria será

$$\int_{V_\infty} \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \, dv = \int_{V_\infty} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \cdot \mathbf{B} \, dv$$

y por lo tanto

$$\int_{V_C} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot \mathbf{J} \, dv = \int_{V_C} \mathbf{A} \cdot \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} \, dv$$

Capítulo 8

Ecuaciones de MAXWELL

Introducción

Las ecuaciones de MAXWELL son :

$$\nabla \times \boldsymbol{\mathcal{E}} = -\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{B}}}{\partial t} \quad (8.1)$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\mathcal{D}} = \rho_\nu \quad (8.2)$$

$$\nabla \times \boldsymbol{\mathcal{H}} = \boldsymbol{\mathcal{J}} + \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{D}}}{\partial t} \quad (8.3)$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\mathcal{B}} = 0 \quad (8.4)$$

donde: $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ [V/m] es la intensidad del campo eléctrico, $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ [A/m] es la intensidad de campo magnético, $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ [C/m.²] es la densidad de flujo eléctrico, $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ [T] es la densidad de flujo, magnético, ρ_ν [C/m.³] es la densidad volumétrica de cargas libres y $\boldsymbol{\mathcal{J}}$ [A/m.²] es la densidad de corriente libre¹.

Es conveniente acompañar las ecuaciones de MAXWELL con las **ecuaciones constitutivas de la materia**:

$$\boldsymbol{\mathcal{D}} = \varepsilon \boldsymbol{\mathcal{E}} \quad (8.5)$$

$$\boldsymbol{\mathcal{B}} = \mu \boldsymbol{\mathcal{H}} \quad (8.6)$$

$$\boldsymbol{\mathcal{J}} = \sigma \boldsymbol{\mathcal{E}} \quad (8.7)$$

donde ε [F/m] es la *permitividad* eléctrica del medio, μ [H/m] es la *permeabilidad* magnética del medio y σ [S/m] es la *conductividad* del medio.

¹Las unidades de medida pertenecen al sistema internacional de unidades (SI).

Las ecuaciones de MAXWELL también se pueden expresar de forma integral:

$$\oint_L \boldsymbol{\mathcal{E}} \cdot d\boldsymbol{\ell} = -\frac{d}{dt} \int_S \boldsymbol{\mathcal{B}} \cdot d\boldsymbol{s}, \quad \oint_S \boldsymbol{D} \cdot d\boldsymbol{s} = \mathcal{Q} \quad (8.8)$$

$$\oint_L \boldsymbol{\mathcal{H}} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \frac{d}{dt} \int_S \boldsymbol{D} \cdot d\boldsymbol{s} + I, \quad \oint_S \boldsymbol{\mathcal{B}} \cdot d\boldsymbol{s} = 0 \quad (8.9)$$

8.1. Balance energético instantáneo

Multiplicando escalarmente la Ecuación (11.26) por el campo $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ y la Ecuación (11.25) por el campo $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ y restando a la primera la última de las ecuaciones que se obtienen, resulta:

$$\boldsymbol{\mathcal{H}} \cdot \nabla \times \boldsymbol{\mathcal{E}} - \boldsymbol{\mathcal{E}} \cdot \nabla \times \boldsymbol{\mathcal{H}} = -\boldsymbol{\mathcal{H}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{B}}}{\partial t} - \boldsymbol{\mathcal{E}} \cdot \boldsymbol{\mathcal{J}} - \boldsymbol{\mathcal{E}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \quad (8.10)$$

usando la identidad vectorial

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) - \boldsymbol{A} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{B})$$

se obtiene:

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{\mathcal{E}} \times \boldsymbol{\mathcal{H}}) = -\boldsymbol{\mathcal{H}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{B}}}{\partial t} - \boldsymbol{\mathcal{E}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} - \boldsymbol{\mathcal{E}} \cdot \boldsymbol{\mathcal{J}} \quad (8.11)$$

la cual, para un medio simple, se puede escribir de la siguiente forma:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\mathcal{S}} = -\frac{\partial}{\partial t} (w_e + w_m) - p_\sigma \quad (8.12)$$

donde $\boldsymbol{\mathcal{S}} = \boldsymbol{\mathcal{E}} \times \boldsymbol{\mathcal{H}}$ es el **vector de sc Poynting** instantáneo en $[\text{W}/\text{m}^2]$, $w_e = \frac{1}{2}\varepsilon\mathcal{E}^2$ y $w_m = \frac{1}{2}\mu\mathcal{H}^2$ son las densidades (volumétricas) de energía eléctrica y magnética, respectivamente, las cuales se expresan en $[\text{J}/\text{m}^3]$ y $p_\sigma = \sigma\mathcal{E}^2$ es la densidad (volumétrica) de potencia disipada en $[\text{W}/\text{m}^3]$ por efecto Joule (todas las unidades en el sistema SI).

8.1.1. Teorema de POYNTING

La forma integral de la Ecuación (8.12) se obtiene al integrar ambos miembros sobre un volumen dado y al aplicar el Teorema de la Divergencia al primer término:

$$\oint_{S(V)} \boldsymbol{\mathcal{S}} \cdot d\boldsymbol{s} = -\frac{d}{dt} \int_V (w_e + w_m) d\nu - \int_V p_\sigma d\nu \quad (8.13)$$

En relación con la Ecuación (8.13) se enuncia el Teorema de POYNTING en sus dos modalidades o regímenes.

Régimen de emisión

En el régimen de emisión –ver Fig. 8.1(a)– el flujo $\oint_S \mathbf{S} \cdot d\mathbf{s}$ es positivo y se debe interpretar de la manera siguiente: la cantidad de energía que fluye al exterior de un volumen, a través de la superficie que lo delimita, debe igualar la razón de disminución temporal de la energía electromagnética en el interior, si en el interior no se localizan fuentes externas del campo [5].

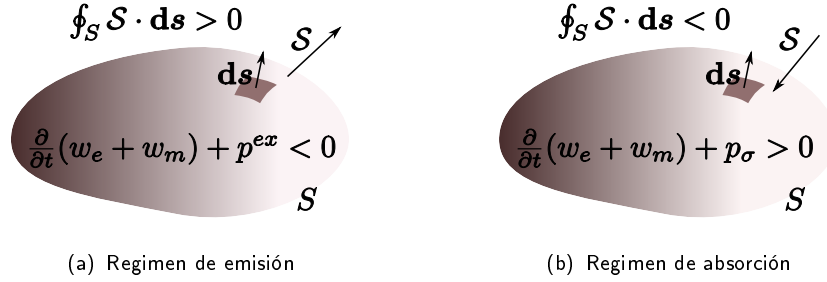


Figura 8.1: Regímenes de emisión y de absorción.

Es conveniente añadir, en este sentido, un término \mathcal{J}^{ex} en el miembro de la derecha de la Ecuación (11.26) que modele las fuentes exteriores de los campos, en cuyo caso se deberá modificar la Ecuación (8.11) de la forma

$$\nabla \cdot \mathbf{S} = -\frac{\partial}{\partial t}(w_e + w_m) - p_\sigma - p^{ex}$$

donde $p^{ex} = \mathcal{E} \cdot \mathcal{J}^{ex}$ ($p^{ex} < 0$) representa la densidad volumétrica de potencia generada en el punto a partir de la conversión de algún tipo de energía no electromagnética en energía electromagnética.

Régimen de absorción

En el régimen de absorción –ver Fig. 8.1(b)– el flujo $\oint_S \mathbf{S} \cdot d\mathbf{s}$ es negativo y se debe interpretar de la manera siguiente: la cantidad de energía que fluye al interior de un volumen, a través de la superficie que lo delimita, debe igualar a la suma de la razón de crecimiento temporal de la energía electromagnética más la potencia disipada por conducción en el interior.

8.2. Condiciones de borde

En la superficie $S_{1,2}$ de separación de dos regiones (Fig. 8.2) en las que, por razones vinculadas a las distintas propiedades físicas de los medios que llenan tales regiones, cierto campo manifiesta un cambio discreto, el campo está obligado a cumplir ciertas condiciones, las cuales se derivan de su estructura (especificada mediante su $\nabla \cdot$ y su $\nabla \times$), denominadas condiciones de borde. Sea \mathbf{A} tal campo, y sea h el espesor alrededor de la superficie de contacto entre las dos regiones en el que las propiedades físicas de los dos medios cambian de un valor dado en la región 1, a otro valor en la región 2. Las mencionadas condiciones de borde se expresan de la forma:

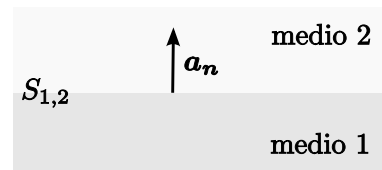


Figura 8.2: Frontera $S_{1,2}$ entre dos medios distintos.

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_n \times (\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1) &= \lim_{h \rightarrow 0} (h \nabla \times \mathbf{A}) \\ \mathbf{a}_n \cdot (\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1) &= \lim_{h \rightarrow 0} (h \nabla \cdot \mathbf{A})\end{aligned}$$

En particular, los campos eléctrico y magnéticos están supeditados a las condiciones de frontera o de borde que se muestran en el cuadro 8.1.

Cuadro 8.1: Condiciones de borde

Componente	Campo eléctrico	Campo magnético
<i>Normal</i>	$(\mathcal{D}_2 - \mathcal{D}_1) \cdot \mathbf{a}_n = \rho_s$	$(\mathcal{B}_2 - \mathcal{B}_1) \cdot \mathbf{a}_n = 0$
<i>Tangencial</i>	$\mathbf{a}_n \times (\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1) = 0$	$\mathbf{a}_n \times (\mathcal{H}_2 - \mathcal{H}_1) = \mathcal{J}_s$

8.3. Campos en el espacio ilimitado

La idea de campos en un espacio ilimitado se refiere a todas las soluciones posibles de las Ecuaciones de MAXWELL ((11.25)– (8.4)) en una región llena de un medio simple de extensión infinita o ilimitada, en la que no existen *fuentes impresas* (*externas, exteriores o forzantes*) del campo. Estos campos, a su vez, se denominan *libres*[5].

8.3.1. Ecuaciones de segundo orden

Es posible obtener, a partir de las Ecuaciones (11.25), (11.27), (11.26) y (8.4), y asumiendo, como se ha indicado, un medio simple, i.e. homogéneo, lineal e isotrópico, Ecuaciones de 2.º orden en función de solamente uno de los campos \mathcal{E} y \mathcal{H} :

$$\nabla \times \nabla \times \mathcal{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathcal{H} \quad (8.14)$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathcal{H} = \nabla \times \mathcal{J} + \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathcal{E} \quad (8.15)$$

tomando en cuenta que

$$\nabla \times \nabla \times \mathcal{A} = \nabla (\nabla \cdot \mathcal{A}) - \nabla^2 \mathcal{A}$$

se obtiene:

$$\nabla (\nabla \cdot \mathcal{E}) - \nabla^2 \mathcal{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathcal{H} \quad (8.16)$$

$$\nabla (\nabla \cdot \mathcal{H}) - \nabla^2 \mathcal{H} = \nabla \times \mathcal{J} + \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathcal{E} \quad (8.17)$$

de donde sigue:

$$\square^2 \mathcal{E} = \frac{1}{\epsilon} \nabla \rho + \mu \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{J} \quad (8.18)$$

$$\square^2 \mathcal{H} = -\nabla \times \mathcal{J} \quad (8.19)$$

las cuales se denominan **ecuaciones de D'ALEMBERT** y donde el operador $\square^2 = \nabla^2 - \mu\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ se denomina d' Alembertiano.

Al no existir fuentes ($\rho_\nu = 0$ y $\mathcal{J} = \boldsymbol{\nu}$), las Ecuaciones (8.18) y (8.19) se convierten en las **ecuaciones vectoriales homogéneas de la onda**:

$$\square^2 \mathcal{E} = 0 \quad (8.20)$$

$$\square^2 \mathcal{H} = 0 \quad (8.21)$$

Si los campos no variasen respecto al tiempo, las Ecuaciones (8.18) y (8.19) darían lugar a las ecuaciones vectoriales de POISSON y las Ecuaciones (8.20) y (8.21) a las Ecuaciones vectoriales de LAPLACE. Cabe observar que, como veremos más adelante, el campo electromagnético libre más sencillo es la onda plana homogénea.

8.3.2. Ecuaciones de segundo orden de los potenciales

Ecuaciones de segundo orden de las funciones potenciales, similares a las Ecs. (8.18) (8.19) y (8.20), (8.21), se pueden deducir de la manera que se describe a a continuación. Partiremos de las Ecuaciones de MAXWELL (11.27) y (11.26), asumiendo

un medio simple:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}} = \frac{\rho_\nu}{\varepsilon} \quad (8.22)$$

$$\nabla \times \boldsymbol{\mathcal{B}} = \mu\varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{E}}}{\partial t} + \mu\boldsymbol{\mathcal{J}} \quad (8.23)$$

tomando en cuenta que:

$$\boldsymbol{\mathcal{B}} = \nabla \times \boldsymbol{\mathcal{A}} \quad (8.24)$$

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} = -\nabla V - \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{A}}}{\partial t} \quad (8.25)$$

al sustituir estas expresiones en las Ecuaciones (8.22) y (8.23) se obtiene:

$$\nabla \cdot \left(-\nabla V - \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{A}}}{\partial t} \right) = \frac{\rho_\nu}{\varepsilon} \quad (8.26)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{\mathcal{A}}) = \mu\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(-\nabla V - \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{A}}}{\partial t} \right) + \mu\boldsymbol{\mathcal{J}} \quad (8.27)$$

usando las identidades vectoriales:

$$\nabla \cdot \nabla \varphi = \nabla^2 \varphi$$

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{\mathcal{F}} = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{\mathcal{F}}) - \nabla^2 \boldsymbol{\mathcal{F}}$$

y reordenando apropiadamente las ecuaciones resulta:

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho_\nu}{\varepsilon} - \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \boldsymbol{\mathcal{A}}) \quad (8.28)$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{\mathcal{A}} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{\mathcal{A}}}{\partial t^2} = -\mu\boldsymbol{\mathcal{J}} + \nabla \left(\nabla \cdot \boldsymbol{\mathcal{A}} + \mu\varepsilon \frac{\partial V}{\partial t} \right) \quad (8.29)$$

Admitiendo la **condición de Lorentz**:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\mathcal{A}} = -\mu\varepsilon \frac{\partial V}{\partial t} \quad (8.30)$$

las Ecuaciones (8.28) y (8.29) se desacoplan y dan lugar finalmente a las ecuaciones D' Alembert de los potenciales:

$$\nabla^2 V - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho_\nu}{\varepsilon} \quad (8.31)$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{\mathcal{A}} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{\mathcal{A}}}{\partial t^2} = -\mu\boldsymbol{\mathcal{J}} \quad (8.32)$$

Para el caso $\boldsymbol{\mathcal{J}} = 0$ y $\rho_\nu = 0$, las ecuaciones anteriores se convierten en las ecuaciones vectoriales de onda de las funciones potenciales:

$$\nabla^2 V - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0 \quad (8.33)$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{\mathcal{A}} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{\mathcal{A}}}{\partial t^2} = 0 \quad (8.34)$$

8.3.3. Solución de la Ecuación de D' ALEMBERT

La Ecuación Vectorial de D' ALEMBERT $\square^2 \mathbf{x}(\mathbf{r}, t) = -\mathbf{y}(\mathbf{r}', t')$ se puede resolver aplicando por la izquierda el operador inverso $(\square^2)^{-1}$:

$$\begin{aligned} (\square^2)^{-1} \square^2 \mathbf{x}(\mathbf{r}, t) &= (\square^2)^{-1} [-\mathbf{y}(\mathbf{r}', t')] \\ \mathbf{x}(\mathbf{r}, t) &= (\square^2)^{-1} [-\mathbf{y}(\mathbf{r}', t')] \end{aligned}$$

El operador inverso tiene la forma

$$(\square^2)^{-1} [] \equiv \int_{V'} \int_{T'} [] g(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t') dt' dV'$$

donde $g(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t')$ es la respuesta impulsiva del medio y es la solución de la ecuación

$$\square^2 g(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t') = -\delta(x - x')\delta(y - y')\delta(z - z')\delta(t - t')$$

siendo $\delta(x - x')\delta(y - y')\delta(z - z')\delta(t - t')$ una fuente puntual impulsiva en (x', y', z', t') .

Se puede demostrar que la forma de $g(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t')$ es la siguiente

$$g(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t') = -\frac{\delta \left[t' - \left(t - \frac{R}{v_p} \right) \right]}{4\pi R}$$

por lo que la solución de la Ecuación de D' ALAMBERT ha de tener la forma:

$$\mathbf{x}(\mathbf{r}, t) = \int_{V'} \frac{\mathbf{y} \left(\mathbf{r}', t - \frac{R}{v_p} \right)}{4\pi R} dV' \quad (8.35)$$

Vamos a deducir de seguido la solución dada por la Ec. (11.140) de una manera que esperamos resulte natural e intuitiva.

Ya que la Ecuación Vectorial de D' ALEMBERT –p.e. (8.18), (8.19) y (8.32)– está compuesta, en coordenadas Cartesianas, por tres ecuaciones escalares de D' Alembert –p.e. (8.31)–, será suficiente entonces resolver la ecuación:

$$\nabla^2 x - \mu\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} x = -y \quad (8.36)$$

donde $x = x(t, \mathbf{r})$ y $y = y(t, \mathbf{r}')$.

El problema físico modelado por la Ec. (8.36) se reproduce gráficamente en la Fig. 8.3.

En la Figura 8.3(a) unas *fuentes* se distribuyen en un volumen finito V' , con una ley de dependencia espacial y temporal de la forma $y(t, \mathbf{r}')$. Esta distribución de fuentes produce un *campo* $x(t, \mathbf{r})$ en un punto de observación \mathbf{r} determinado. La relación de interdependencia entre las fuentes y el campo está gobernada por la Ec. (8.36).

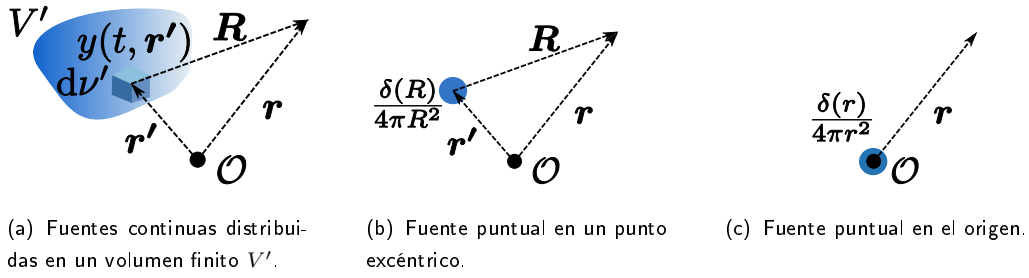


Figura 8.3: Distribuciones de fuentes continua y puntual que reflejan gráficamente el problema físico modelado por la Ec. (8.36)

Para hallar la solución de la Ec. (8.36) supondremos que las funciones $x(t, \mathbf{r})$ y $y(t, \mathbf{r}')$ describen procesos policromáticos:

$$x(t, \mathbf{r}) = \mathfrak{F}^{-1}\{X(f, \mathbf{r})\} \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} X(f, \mathbf{r}) e^{j2\pi ft} df \quad (8.37)$$

$$y(t, \mathbf{r}') = \mathfrak{F}^{-1}\{Y(f, \mathbf{r}')\} \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} Y(f, \mathbf{r}') e^{j2\pi ft} df \quad (8.38)$$

donde las funciones $X(f, \mathbf{r})$ y $Y(f, \mathbf{r}')$ son las transformadas de Fourier de $x(t, \mathbf{r})$ y $y(t, \mathbf{r}')$, respectivamente:

$$X(f, \mathbf{r}) = \mathfrak{F}\{x(t, \mathbf{r})\} \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} x(t, \mathbf{r}) e^{-j2\pi ft} dt \quad (8.39)$$

$$Y(f, \mathbf{r}') = \mathfrak{F}\{y(t, \mathbf{r}')\} \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} y(t, \mathbf{r}') e^{-j2\pi ft} dt \quad (8.40)$$

Al sustituir las expresiones (8.37) y (8.38) en la Ecuación (8.36) se obtiene:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathfrak{F}^{-1}\{X(f, \mathbf{r})\} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathfrak{F}^{-1}\{X(f, \mathbf{r})\} &= -\mathfrak{F}^{-1}\{Y(f, \mathbf{r}')\} \\ \mathfrak{F}^{-1}\left\{\left(\nabla^2 - \mu\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) X(f, \mathbf{r})\right\} &= -\mathfrak{F}^{-1}\{Y(f, \mathbf{r}')\} \\ \mathfrak{F}^{-1}\left\{\left(\nabla^2 + \kappa^2\right) X(f, \mathbf{r})\right\} &= -\mathfrak{F}^{-1}\{Y(f, \mathbf{r}')\} \end{aligned}$$

donde $\kappa = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$, con $\omega = 2\pi f$, se denomina **número de onda**. Y como esta ecuación ha de cumplirse individualmente para cada armónico, será:

$$\nabla^2 X(\mathbf{r}) + \kappa^2 X(\mathbf{r}) = -Y(\mathbf{r}'), \quad \text{para el armónico a } f \text{ Hercios} \quad (8.41)$$

La solución de la Ecuación (8.41) tendrá la forma:

$$X(\mathbf{r}) = (\nabla^2 + \kappa^2)^{-1}[-Y(\mathbf{r}')] \quad (8.42)$$

donde el operador inverso $(\nabla^2 + \kappa^2)^{-1}$ es una integral de convolución:

$$X(\mathbf{r}) = \int_{V'} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')[-Y(\mathbf{r}')] dV' \quad (8.43)$$

la función $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ se denomina **función de GREEN**. La función de GREEN satisface la ecuación:

$$(\nabla^2 + \kappa^2) G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \quad (8.44)$$

donde $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')/4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2$ representa una fuente puntual puesta en \mathbf{r}' –ver Fig. 8.3(b)–, variable armónicamente en el tiempo a la frecuencia f . La Ecuación (8.44) se puede escribir explícitamente en coordenadas esféricas, poniendo, por comodidad, $\mathbf{r}' = \mathbf{0}$ –Fig. 8.3(c)–, de la forma siguiente:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr} G(\mathbf{r}) + \kappa^2 G(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r}) \quad (8.45)$$

En los puntos donde $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$, se puede escribir:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr} G(\mathbf{r}) + \kappa^2 G(\mathbf{r}) = 0 \quad (8.46)$$

La solución de la Ec. (8.46) se halla poniendo $G(\mathbf{r}) = \frac{U(\mathbf{r})}{r}$, en efecto:

$$G(\mathbf{r}) = C_1 \frac{e^{-j\kappa r}}{r} + C_2 \frac{e^{j\kappa r}}{r} \quad (8.47)$$

La solución para una fuente puntual puesta en \mathbf{r}' se puede obtener de la Ec. (8.47) sustituyendo la distancia radial r respecto del origen por la distancia radial R respecto de \mathbf{r}' :

$$G(\mathbf{R}) = C_1 \frac{e^{-j\kappa R}}{R} + C_2 \frac{e^{j\kappa R}}{R} \quad (8.48)$$

El término $C_2 \frac{e^{j\kappa R}}{R}$ representa una onda esférica elemental que se propaga desde el punto \mathbf{r}' hacia el infinito. El término $C_1 \frac{e^{-j\kappa R}}{R}$, en cambio, representa una onda similar que se propaga desde el infinito hacia el punto \mathbf{r}' . Esta última componente de la solución se debe descartar por razones físicas: es una solución anticausal. Luego, al sustituir la solución (11.121) en la Ec. (8.44) se obtiene:

$$(\nabla^2 + \kappa^2) C_1 \frac{e^{-j\kappa R}}{R} = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (8.49)$$

Al integrar esta ecuación, respecto de \mathbf{r} , en un pequeño volumen V_σ alrededor de \mathbf{r}' , se obtiene:

$$C_1 \int_{V_\sigma} (\nabla^2 + \kappa^2) \frac{e^{-j\kappa R}}{R} d\nu = \int_{V_\sigma} \frac{\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} d\nu \quad (8.50)$$

Si $V_\sigma \rightarrow 0$, para lo cual $R \rightarrow 0$, y siendo $d\nu \propto R^2$, resulta:

$$\begin{aligned}
C_1 \int_{V_\sigma} (\nabla^2 + \kappa^2) \underbrace{\frac{e^{-j\kappa R}}{R}}_{\rightarrow \frac{1}{R}} \underbrace{d\nu}_{\propto R^2} &= \underbrace{\int_{V_\sigma} \frac{\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2}}_{=1} \\
C_1 \int_{V_\sigma} \nabla^2 \left(\frac{1}{R}\right) d\nu + C_1 \kappa^2 \underbrace{\int_{V_\sigma} \frac{1}{R} d\nu}_{\rightarrow 0} &= 1 \\
C_1 \int_{V_\sigma} \nabla^2 \left(\frac{1}{R}\right) d\nu &= 1
\end{aligned} \tag{8.51}$$

Tomando en cuenta que $\nabla^2(1/R) = \nabla \cdot (-\mathbf{a}_R/R^2)$, se puede aplicar el Teorema de la Divergencia

$$\begin{aligned}
C_1 \int_{V_\sigma} \nabla^2 \left(\frac{1}{R}\right) d\nu &= 1 \\
C_1 \int_{V_\sigma} \nabla \cdot (-\mathbf{a}_R/R^2) d\nu &= 1 \\
C_1 \underbrace{\oint_{S_\sigma(V_\sigma)} -\frac{\mathbf{a}_R}{R^2} \cdot \mathbf{ds}}_{=-4\pi} &= 1 \\
C_1 &= -\frac{1}{4\pi}
\end{aligned} \tag{8.52}$$

de tal suerte que:

$$\begin{aligned}
G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= -\frac{e^{-j\kappa|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \\
&= -\frac{e^{-j\kappa R}}{4\pi R}
\end{aligned} \tag{8.53}$$

Y ahora, sustituyendo el resultado (8.53) en la Ecuación (8.43), y sustituyendo luego lo que resulta de esta operación en la Ecuación (8.37), tomando en cuenta que $\mathfrak{F}\{x(t - t_0)\} = X(f)e^{-j2\pi ft_0}$, obtenemos:

$$\begin{aligned}
x(t, \mathbf{r}) &= \mathfrak{F}^{-1} \{X(f, \mathbf{r})\} \\
&= \mathfrak{F}^{-1} \left\{ (\nabla^2 + \kappa^2)^{-1} [-Y(f, \mathbf{r}')] \right\} \\
&= \mathfrak{F}^{-1} \left\{ \int_{V'} G(f, \mathbf{r}, \mathbf{r}') [-Y(f, \mathbf{r}')] d\nu' \right\} \\
&= \int_{V'} \mathfrak{F}^{-1} \{G(f, \mathbf{r}, \mathbf{r}') [-Y(f, \mathbf{r}')] \} d\nu' \\
&= \int_{V'} \frac{\mathfrak{F}^{-1} \left\{ e^{-j2\pi f \sqrt{\mu \epsilon} R} [Y(f, \mathbf{r}')] \right\}}{4\pi R} d\nu' \\
&= \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \frac{y\left(t - \frac{R}{v_p}, \mathbf{r}'\right)}{R} d\nu'
\end{aligned} \tag{8.54}$$

donde $v_p = 1/\sqrt{\mu\varepsilon}$ es la **velocidad de propagación**. Y las soluciones de las Ecuaciones (8.31) y (8.32) finalmente son:

$$V(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_{V'} \frac{\rho_\nu \left(t - \frac{R}{v_p}, \mathbf{r}' \right)}{R} dV' \quad (8.55)$$

$$\mathcal{A}(t, \mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathcal{J} \left(t - \frac{R}{v_p}, \mathbf{r}' \right)}{R} dV' \quad (8.56)$$

Las funciones expresadas mediante las Ecuaciones (8.55) y (11.119) se conocen como **potenciales retardados**. Una manera compacta de expresar las soluciones dadas por las Ecs. (8.55) y (11.119) consiste en poner: $[\rho_\nu]_{v_p} \equiv \rho_\nu \left(t - \frac{R}{v_p}, \mathbf{r}' \right)$ y $\mathcal{J} \left(t - \frac{R}{v_p}, \mathbf{r}' \right) \equiv [\mathcal{J}]_{v_p}$, respectivamente:

$$V(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_{V'} \frac{[\rho_\nu]_{v_p}}{R} dV' \quad (8.57)$$

$$\mathcal{A}(t, \mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \frac{[\mathcal{J}]_{v_p}}{R} dV' \quad (8.58)$$

Tales soluciones reflejan matemáticamente el hecho físico de que los campos producidos por las fuentes se propagan a través del espacio, o medio, a una velocidad v_p finita. Por ende, los campos que en un determinado instante de tiempo observamos en un punto son el resultado de la acción de las fuentes un instante de tiempo anterior. Existe, efectivamente, un retardo entre la acción de las fuentes y el tiempo en que esta acción se manifiesta en los puntos distantes de la distribución.

8.3.4. Problemas

1. Un generador entrega al punto $(x = 1, y = 1, z = 0)$ del espacio libre (vacío, asuma que $\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} = 3 \times 10^8$ [m/s]) un Julio de energía por segundo, durante un segundo, toda la cual se transforma instantáneamente en campo electromagnético. Los campos eléctrico y magnético, pasado un segundo, satisfacen ambos la Ecuación de D'ALEMBERT homogénea:

$$\left(\nabla^2 - \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{Campo} = 0 \quad (8.59)$$

- a) Para un observador ubicado en el punto

$$(x = 300.000.000,5 \times \sqrt{2}, y = 300.000.000,5 \times \sqrt{2}, z = 0)$$

cuánto tiempo transcurre para que perciba el campo electromagnético.

- b) Calcule el vector de POYNTING \mathbf{S} .

- c) Evalúe la integral de \mathbf{S} a través de dos superficies cerradas S_1 y S_2 cualesquiera tal que: $\oint_{S_1} \mathbf{S} \cdot d\mathbf{s} \neq \oint_{S_2} \mathbf{S} \cdot d\mathbf{s}$. Defina apropiadamente ambas superficies e indique el valor exacto de ambas integrales, y comente, por supuesto, que precauciones debe tomar con respecto al tiempo.
- d) Razonadamente responda: ¿Se podrá hacer circular una corriente de un amperio sobre una resistencia de un ohmio en el punto del observador extrayendo energía del campo electromagnético?
2. Compruebe que la solución de la ecuación $\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr} G(\mathbf{r}) + \kappa^2 G(\mathbf{r}) = 0$ es $G(\mathbf{r}) = C_1 \frac{e^{-j\kappa r}}{r} + C_2 \frac{e^{j\kappa r}}{r}$. Ayuda: parta imponiendo que $G(\mathbf{r}) = \frac{U(\mathbf{r})}{r}$.
3. Tomando en cuenta

- que la solución de la ecuación $\square^2 x = -y$ se obtiene aplicando por la izquierda el operador inverso $(\square^2)^{-1}$:

$$\begin{aligned} (\square^2)^{-1} \square^2 x &= (\square^2)^{-1} (-y) \\ x &= (\square^2)^{-1} (-y) \end{aligned}$$

donde y representa las fuentes impresas, las cuales se localizan en cierto volumen V' , y x los campos producidos por estas fuentes en una región ilimitada,

- y que la expresión analítica de $(\square^2)^{-1}(\)$ se conoce: $(\square^2)^{-1}(\) = \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \frac{[-(\)]_{vp}}{R} dV'$

Escriba:

- a) La solución de la ecuación $\square^2 \mathcal{H} = -\nabla \times \mathcal{J}$.
- b) La solución de la ecuación $\square^2 \mathcal{E} = \frac{\nabla \rho_v}{\epsilon} + \mu \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial t}$.
4. Demuestre que las soluciones que se obtienen en (3a) y (3b) coinciden con $\mathcal{H} = \frac{\nabla \times \mathcal{A}}{\mu}$ y $\mathcal{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t}$, respectivamente. Ayuda: puede valerse de la identidad vectorial $\nabla \times (\varphi \mathcal{A}) = \nabla \varphi \times \mathcal{A} + \varphi \nabla \times \mathcal{A}$.
5. Dada la distribución de cargas libres:

$$\rho_v(t, \mathbf{r}') = P_0 \cos(2\pi ft) \frac{\delta(\mathbf{r}')}{4\pi r'^2}$$

con $f = 3$ MHz, calcule:

- a) $V(t, \mathbf{r})$.
- b) $V_1(t) = V(t, 0.25 \text{ m})$ y $V_2 = V(t, 0.5 \text{ m})$.
- c) Realice una gráfica de $\rho_v(t, \mathbf{r}')$, V_1 y V_2 versus el tiempo.

8.4. Ecuaciones de MAXWELL en forma compleja

Dadas las ecuaciones de MAXWELL para campos que varían con el tiempo de acuerdo a una ley arbitraria:

$$\nabla \times \boldsymbol{\mathcal{E}} = -\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{B}}}{\partial t} \quad (8.60)$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\mathcal{D}} = \rho_\nu \quad (8.61)$$

$$\nabla \times \boldsymbol{\mathcal{H}} = \boldsymbol{\mathcal{J}} + \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{D}}}{\partial t} \quad (8.62)$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\mathcal{B}} = 0 \quad (8.63)$$

valen las siguientes consideraciones:

- Los campos con una dependencia generalizada respecto del tiempo constituyen, en general, procesos policromáticos, o sea: poseen un espectro con múltiples componentes frecuenciales.
- Según el análisis de FOURIER, toda función arbitraria del tiempo se puede expandir en una combinación continua (transformada de FOURIER), o discreta (serie de FOURIER), de ciertas funciones elementales (autofunciones), corrientemente denominadas *armónicos*.
- Cada armónico representa un proceso monocromático.
- Los operadores diferenciales de las ecuaciones de MAXWELL son f -invariantes, o sea no varían con la frecuencia.
- Los resultados del análisis de un proceso monocromático, se pueden extender de manera natural al caso policromático.

8.4.1. Proceso monocromático

Supongamos que los campos varían armónicamente respecto al tiempo. La expresión del campo eléctrico tendrá la siguiente forma:

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cos[\omega t + \varphi_e(\mathbf{r})] = \Re\{\mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{j\varphi_e(\mathbf{r})} e^{j\omega t}\} \quad (8.64)$$

donde la cantidad compleja $\mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{j\varphi_e(\mathbf{r})}$, o abreviadamente \mathbf{E} , es el fasor campo eléctrico asociado a $\boldsymbol{\mathcal{E}}(t, \mathbf{r})$.

Problema. En el espacio libre coexisten los siguientes campos eléctricos: a f_0 [Hz]

$$\mathbf{E}_1 = (1 - j)\hat{x} - 2\hat{z} \quad (8.65)$$

y a $2f_0$ [Hz]

$$\mathbf{E}_2 = (2 - j)\hat{y} - (5 - j)\hat{z} \quad (8.66)$$

Se dispone de un par de sondas (antenas) orientadas una en la dirección de \hat{x} y la otra en la dirección de \hat{y} , siendo sus factores de antena iguales a 1 metro (esto significa que el voltaje inducido en los terminales de tales antenas es igual a $E \times 1$ [V]). Ambas sondas se conectan con cables coaxiales de longitud despreciable con relación al menor valor de λ a los puertos de entrada A y B de un osciloscopio. Trace para dos períodos T_0 lo que deberá observarse en la pantalla. Indique con claridad las amplitudes y fases respectivas.

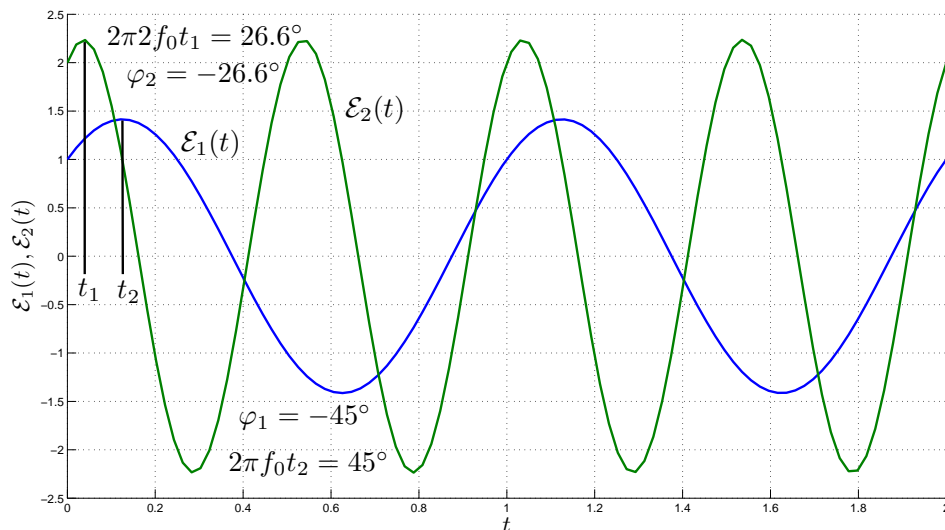


Figura 8.4: Gráfica de los voltajes que deberían ser vistos en la pantalla del osciloscopio.

Resp.

8.4.2. Algunas propiedades de los fasores

Para los fasores A y B valen las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \Re\{A\} &= \Re\left\{\frac{\partial}{\partial t} A\right\} \\ \int \Re\{A\} dt &= \Re\left\{\int A dt\right\} \\ c\Re\{A\} &= \Re\{cA\} \\ \Re\{A+B\} &= \Re\{A\} + \Re\{B\}\end{aligned}$$

Además, vale el siguiente lema:

$$\text{si } \Re\{Ae^{j\omega t}\} = \Re\{Be^{j\omega t}\} \forall t \rightarrow A = B$$

8.4.3. Ecuaciones de MAXWELL complejas

Para obtener las ecuaciones de MAXWELL en forma compleja (o en el dominio de la frecuencia), podemos proceder de la siguiente manera sistemática:

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathcal{E} &= -\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cos[\omega t + \varphi_e(\mathbf{r})] &= -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cos[\omega t + \varphi_m(\mathbf{r})] \\ \nabla \times \Re\{\mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{j\varphi_e(\mathbf{r})} e^{j\omega t}\} &= -\frac{\partial}{\partial t} \Re\{\mathbf{B}(\mathbf{r}) e^{j\varphi_m(\mathbf{r})} e^{j\omega t}\} \\ \Re\{\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{j\varphi_e(\mathbf{r})} e^{j\omega t}\} &= \Re\left\{-\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}) e^{j\varphi_m(\mathbf{r})} e^{j\omega t}\right\} \\ \Re\left\{[\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{j\varphi_e(\mathbf{r})}] e^{j\omega t}\right\} &= \Re\left\{[-j\omega \mathbf{B}(\mathbf{r}) e^{j\varphi_m(\mathbf{r})}] e^{j\omega t}\right\} \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -j\omega \mathbf{B}\end{aligned}$$

donde $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r})e^{j\varphi_e(\mathbf{r})}$ y $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{r})e^{j\varphi_m(\mathbf{r})}$ son los fasores de los campos eléctrico y magnético, respectivamente.

Por inspección de la definición de fasor y de su relación con el campo instantáneo correspondiente, y de las propiedades y lema de los fasores, vemos que es posible obtener las versiones complejas de las ecuaciones de MAXWELL de una manera más expedita, simplemente sustituyendo los campos por sus fasores, y la derivada temporal $\frac{\partial}{\partial t}$ por el factor $j\omega$: $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow j\omega$. De cualquier forma obtendremos:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega \mathbf{B} \quad (8.67)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v \quad (8.68)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega \mathbf{D} + \mathbf{J} \quad (8.69)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (8.70)$$

8.5. Propiedades de los medios materiales en el dominio de la frecuencia

Junto con las Ecuaciones de MAXWELL (8.67), (8.68), (8.69), y (8.70), debemos escribir las **ecuaciones constitutivas** de la materia en forma compleja:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \varepsilon \mathbf{E} \\ \mathbf{B} &= \mu \mathbf{H} \\ \mathbf{J} &= \sigma \mathbf{E} \end{aligned} \quad (8.71)$$

En las Ecuaciones (8.71) debemos advertir el carácter complejo de los parámetros ε y μ . Estos parámetros han de ser complejos porque los procesos de polarización eléctrica y de magnetización ocurren con inercia, y esta inercia se manifiesta mediante un desfase entre los campos \mathbf{D} y \mathbf{E} , y \mathbf{B} y \mathbf{H} , respectivamente. Para medios típicos, este desfase tiene la forma de un ángulo no mayor de $\pi/2$, α para los campos \mathbf{D} y \mathbf{E} , y β para los campos \mathbf{B} y \mathbf{H} . De esta forma podemos escribir:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= |\varepsilon| e^{-j\alpha} \mathbf{E}, \quad 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} \\ \mathbf{B} &= |\mu| e^{-j\beta} \mathbf{H}, \quad 0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2} \end{aligned} \quad (8.72)$$

Por consiguiente:

$$\varepsilon = \varepsilon' - j\varepsilon'' \quad \mu = \mu' - j\mu'' \quad (8.73)$$

$$\varepsilon' = |\varepsilon| \cos \alpha \quad \mu' = |\mu| \cos \beta \quad (8.74)$$

$$\varepsilon'' = |\varepsilon| \sin \alpha \quad \mu'' = |\mu| \sin \beta \quad (8.75)$$

El parámetro ε' se debe interpretar como la permitividad eléctrica del medio en su sentido ordinario, y modela la propensión del medio a polarizarse eléctricamente. El parámetro ε'' , en cambio, modela la inercia del proceso de polarización, y permite cuantificar las pérdidas por calentamiento de la polarización.

A través de la [Body Tissue Dielectric Parameters Tool](#) de la página web de la FCC se pueden consultar los valores de ε y σ para diferentes tejidos humanos. Los parámetros allí disponibles están basados en el trabajo experimental sobre [Dielectric properties of body tissues](#) de Camelia Gabriel publicados en el U.S. Air Force Report AFOSR-TR-96.

El parámetro μ' , por su parte, se debe interpretar como la permeabilidad eléctrica del medio en su sentido ordinario, y modela la tendencia del medio a magnetizarse. El parámetro μ'' , en cambio, modela la inercia del proceso de magnetización, y permite cuantificar las pérdidas por calentamiento de la magnetización.

8.5.1. Problemas

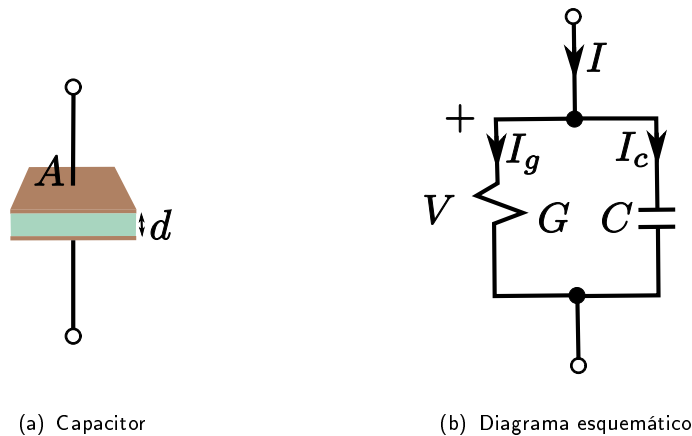


Figura 8.5: Problema 2.

- Tomando en cuenta el modelo equivalente de un capacitor real que se ilustra en la Fig. 8.5, se comprueba que $I = I_g + I_c$, que $I = YV$ y que $Y = G + j\omega C$. Asumiendo que $\mathbf{J} = [\sigma + j\omega(\varepsilon' - j\varepsilon'')] \mathbf{E}$

- Compruebe que $G = (\sigma + \omega\varepsilon'') \frac{A}{d}$ y $C = \varepsilon' \frac{A}{d}$, donde A es el área de las placas del capacitor y d la distancia entre ellas.
- Si el capacitor lleno de aire presenta una capacitancia d-c de 3 fF, y al llenarlo con aceite presenta una impedancia de $(500 - j) \times 10^3 [\Omega]$ a $\omega = 10^6$, determine ε'_r y ε''_r asumiendo $\sigma = 0$.

- Considerando $\vec{\mathcal{J}}(t, r) = \vec{J}_0(r) \cos[\omega t + \varphi(r)]$, compruebe que $\vec{\mathcal{A}}(t, r) = \Re\{\vec{A}e^{j\omega t}\}$,

donde

$$\begin{aligned}\vec{A} &= \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \vec{J}(r) \frac{e^{-j\kappa R}}{R} dV' \\ \vec{A}(t, r) &= \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \frac{\tilde{J}(r, t - R/\nu_p)}{R} dV'\end{aligned}$$

3. Cierta distribución de corriente \vec{J} produce un vector potencial magnético dado por

$$\vec{A}(r) = \frac{100A_0 e^{-j\kappa_0 r}}{r} \hat{\theta}$$

donde $f = \frac{3}{5}$ GHz, κ_0 es el número de onda del vacío y $A_0 = \frac{5}{6\pi} \times 10^{-9}$,

- determine $\vec{A}(r, t)$ de forma que en su expresión aparezca explícitamente el retardo temporal,
 - calcule el campo eléctrico $\vec{E}(r, t)$ en el dominio del tiempo asociado con $\vec{A}(r, t)$,
 - determine la longitud del camino Γ mas corto necesario para que este campo desarrolle un voltio pico: $\max \int_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 1$ a 200 metros del origen,
 - disponga de dos sondas de campo eléctrico para extraer energía de éste, ambas con un factor de antena $K = 1$ ($\mathcal{E}K = V$), una en $r = 200$ m y la otra en $r = 200,25$ m, y conecte ambas sondas, con sendas líneas de transmisión de igual longitud, a un osciloscopio, y dibuje lo que debería verse en la pantalla de éste (sobre el dibujo indique los valores numéricos de interés: amplitud y fase de cada canal).
4. Un generador entrega al punto $(x = 1, y = 1, z = 0)$ del espacio libre (vacío, asuma que $\frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 3 \times 10^8$ [m/s]) un Julio de energía cada segundo, armónicamente, toda la cual se transforma instantáneamente en campo electromagnético, el cual es irradiado isotrópicamente al espacio. Los campos eléctrico y magnético, fuera de dicho punto, alcanzado el regimen permanente, satisfacen ambos la Ecuación de HELMHOLTZ homogénea:

$$(\nabla^2 + \kappa^2) \mathbf{Campo} = 0 \quad (8.76)$$

- a) Para un observador ubicado en el punto

$$(x = 300.000.000,5 \times \sqrt{2}, y = 300.000.000,5 \times \sqrt{2}, z = 0)$$

calcule la diferencia de fase del campo con respecto al punto del cual emerge.

- b) Calcule el vector de POYNTING \mathbf{S} complejo.
- c) Evalúe la integral de \mathbf{S} a través de dos superficies cerradas S_1 y S_2 cualesquiera tal que: $\oint_{S_1} \mathbf{S} \cdot d\mathbf{s} \neq \oint_{S_2} \mathbf{S} \cdot d\mathbf{s}$. Defina apropiadamente ambas superficies e indique el valor exacto de ambas integrales.
- d) Calcule cuánta potencia se podrá extraer de este campo de una área de 1 m.² de su frente de onda en el punto $(x = 2, y = 4, z = 5)$ [Kms].

8.6. Balance energético complejo

Si se procede a proyectar la Ec. (8.67) sobre $\frac{\mathbf{H}^*}{2}$, y el conjugado de la (8.69) sobre $\frac{\mathbf{E}}{2}$

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{H}^*}{2} \cdot (\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H}) \\ \frac{\mathbf{E}}{2} \cdot (\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\varepsilon\mathbf{E} + \mathbf{J}^i)^* \end{aligned}$$

y luego se restan ambas ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\mathbf{H}^* \cdot \nabla \times \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H}^*) &= -j\frac{\omega}{2}(\mu H^2 - \varepsilon^* E^2) - \frac{1}{2}\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}^{i*} \\ \nabla \cdot \frac{1}{2}\mathbf{E} \times \mathbf{H}^* &= -j\frac{\omega}{2}(\mu H^2 - \varepsilon^* E^2) - \frac{1}{2}\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}^{i*} \end{aligned}$$

al integrar para cierto volumen, al aplicar el Teorema de la Divergencia y al separar las partes real e imaginaria, se obtiene:

$$\frac{1}{2} \oint_{S(V)} \Re \{ \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{\omega}{2} \int_V (\mu'' H^2 + \varepsilon'' E^2) d\nu - \frac{1}{2} \int_V \Re \{ \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}^{i*} \} \quad (8.77)$$

$$\frac{1}{2} \oint_{S(V)} \Im \{ \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{\omega}{2} \int_V (\mu' H^2 - \varepsilon' E^2) d\nu - \frac{1}{2} \int_V \Im \{ \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}^{i*} \} \quad (8.78)$$

Al comprobar, finalmente, que

$$\frac{1}{2} \oint_{S(V)} \Re \{ \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \} \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left(\oint_{S(V)} \mathcal{E} \times \mathcal{H} \cdot d\mathbf{s} \right) dt$$

podemos interpretar el par de Ecs. (8.77) y (8.78) como las ecuaciones de balance de energía activa y de energía reactiva, respectivamente, las cuales describen el proceso de intercambio promedio (temporal) de potencia de la región encerrada por V con el exterior.

8.6.1. Problemas

1. Compruebe que el vector de POYNTING instantáneo \mathcal{S} se relaciona con el vector de POYNTING complejo \mathbf{S} de la forma $\mathcal{S} = \Re\{\mathbf{S} + \frac{1}{2}\mathbf{E} \times \mathbf{H}e^{j2\omega t}\}$.

8.7. Mini-proyecto 1

Usando la base de datos disponible en <http://www.fcc.gov/oet/rfsafety/dielectric.html> seleccione tres materiales de propiedades electromagnéticas *muy* distintas. Seleccione, además, un rango de frecuencias *suficientemente grande* para los fines de las tareas que se proponen a continuación y proceda, usando MATLAB², a

1. Construir las gráficas $\varepsilon = \varepsilon'(f)$ y $\varepsilon'' = \varepsilon''(f)$, usando, si es necesario, escalas a la izquierda y a la derecha.

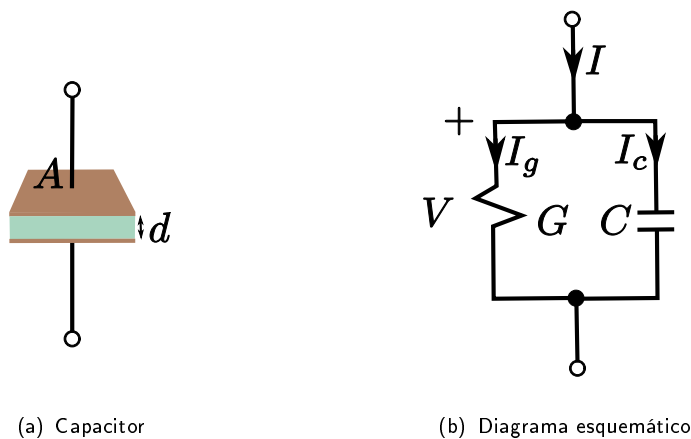


Figura 8.6: Modelo del capacitor bajo prueba.

2. Con base en el modelo que se muestra en la Fig. 8.6 calcule la impedancia normalizada³ $z_N(\omega)$ de un capacitor de placas paralelas, separadas d m y de área transversal A m², relleno con cada uno de los materiales seleccionados y dibuje $z_N(\omega)$, usando MATLAB, sobre una carta de SMITH (función `smithchart`).

²El uso de MATLAB no es restrictivo. Puede usar cualquier otro software matemático.

³Normalice con $50 [\Omega]$

Capítulo 9

Ondas planas

Introducción

En el dominio de la frecuencia la ecuación homogénea de D'ALEMBERT $\square^2 \mathcal{E} = 0$ se convierte en la ecuación homogénea de HELMHOLTZ

$$(\nabla^2 + \kappa^2) \mathbf{E} = 0 \quad (9.1)$$

La familia de soluciones de la Ec. (9.1) en un medio simple infinito constituyen un conjunto de soluciones denominadas libres porque las mismas existen con independencia de las fuentes primarias –que en la Ec. (9.1) se han anulado–. Los campos libres no pueden ser sino dinámicos o solenoidales. Los campos irrotacionales no pueden ser solución de la Ec. (9.1) porque necesitan de las fuentes escalares para sostenerse. En la Ec. (9.1) κ será real si el medio no es absorbente.

9.1. La onda plana homogénea

La Ecuación (9.1) se puede expandir en tres ecuaciones escalares en coordenadas Cartesianas

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \kappa^2 \right) E_x = 0 \quad (9.2a)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \kappa^2 \right) E_y = 0 \quad (9.2b)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \kappa^2 \right) E_z = 0 \quad (9.2c)$$

La solución más simple de la Ec. (9.1) se denomina onda plana homogénea y se puede obtener mediante las premisas que se enuncian a continuación. En primer

lugar, postularemos que la orientación del campo \mathbf{E} es invariante con la posición. Orientando los ejes del sistema de coordenadas de modo que el campo eléctrico yaga sobre el eje x , las Ecs. (9.2) se reducen a una:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \kappa^2 \right) E_x = 0 \quad (9.3)$$

Tomando en cuenta que el campo \mathbf{E} ha de ser solenoidal necesariamente $\frac{\partial}{\partial x} E_x = 0$ y por tanto

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \kappa^2 \right) E_x = 0 \quad (9.4)$$

Finalmente, postularemos que el campo eléctrico solo varía a lo largo de una dirección. Haciendo coincidir esta dirección con el eje z , será $\mathbf{E} = E_0(z)\mathbf{a}_x$ y la Ec. (9.4) asume la forma

$$\frac{d^2}{dz^2} E_x + \kappa^2 E_x = 0 \quad (9.5)$$

La solución de la Ec. (9.5) es:

$$E_x(z) = C_1 e^{-j\kappa z} + C_2 e^{j\kappa z} \quad (9.6)$$

donde C_1 y C_2 son dos constantes complejas indeterminadas: $C_{1,2} = |C_{1,2}| e^{j\varphi_{1,2}}$. En el dominio del tiempo el campo eléctrico tiene la forma:

$$\mathcal{E}(t, z) = [|C_1| \cos(\omega t - \kappa z + \varphi_1) + |C_2| \cos(\omega t + \kappa z + \varphi_1)] \mathbf{a}_x \quad (9.7)$$

En esta ecuación, el término $|C_1| \cos(\omega t - \kappa z + \varphi_1)$ representa una **onda viajera** en el sentido creciente de las z , u **onda progresiva**, y el término $|C_2| \cos(\omega t + \kappa z + \varphi_1)$ representa una onda viajera en el sentido decreciente de las z , u **onda regresiva**. La velocidad ν_p con que viajan los planos equifásicos es igual a la razón $\Delta z / \Delta t$ de dos puntos de igual fase: $\omega t - \kappa z = \omega(t + \Delta t) - \kappa(z + \Delta z)$, de modo que:

$$\nu_p = \frac{\Delta \ell}{\Delta t} = \frac{\omega}{\kappa} = \frac{\omega}{\omega \sqrt{\mu \varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon}}$$

En el espacio libre $\nu_p = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = c = 299792458$ [m/s]. La velocidad ν_p se denomina **velocidad de fase**. La distancia Δz en la cual la fase de la onda varía en 2π radianes, para un instante de tiempo dado, se denomina **longitud de onda** λ : $\kappa \Delta \ell = \kappa \lambda = 2\pi$, de donde sigue que

$$\kappa = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Los planos transversales $z = ctte$. constituyen planos equifásicos: sobre ellos el campo eléctrico presenta la misma fase en todos los puntos.

9.1.1. ¿Y qué del campo H ?

El campo magnético se obtiene como $\mathbf{H} = \frac{\nabla \times \mathbf{E}}{-j\omega\mu}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{H} &= \frac{1}{-j\omega\mu} \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{a}_z \right) \times \mathbf{E} \\ &= \frac{1}{-j\omega\mu} (-j\kappa) [C_1 e^{-j\kappa z} - C_2 e^{j\kappa z}] \mathbf{a}_y\end{aligned}$$

el cual se puede describir de la forma compacta

$$\mathbf{H} = \frac{(\mathbf{a}_z \times \mathbf{E})}{\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}} = \mathbf{a}_z \times \frac{\mathbf{E}}{\eta} \quad (9.8)$$

donde $\eta = \sqrt{\mu/\varepsilon}$ es la impedancia intrínseca del medio. En el vacío $\eta = \eta_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} = 120\pi = 377 \text{ } [\Omega]$. De la Ec. (11.1) se observa que los campos eléctrico y magnético son mutuamente ortogonales y, a su vez, transversales a la dirección de propagación.

El campo electromagnético:

$$\mathbf{E} = C_1 e^{-j\kappa z} \mathbf{a}_x \quad (9.9)$$

$$\mathbf{H} = \frac{C_1}{\eta} e^{-j\kappa z} \mathbf{a}_y \quad (9.10)$$

se propaga en el sentido de crecimiento de la variable longitudinal z y representa una **onda plana homogénea**. **Plana**: por la forma de la superficie equipotencial. **Homogénea**: por la uniformidad del campo sobre la superficie equipotencial.

9.1.2. Onda plana en un medio homogéneo absorbente

En un medio absorbente la apariencia de la solución de la Ec. 9.5 no cambia. Sin embargo, ya que $\varepsilon = \varepsilon' - j\varepsilon'' = |\varepsilon|^{-j\alpha}$ y $\mu = \mu' - j\mu'' = |\mu|e^{-j\beta}$, con, típicamente, $0 \leq \alpha \leq \pi/2$ y $0 \leq \beta \leq \pi/2$, el número de onda será complejo: $\kappa = \pm\omega\sqrt{|\varepsilon|^{-j\alpha}|\mu|e^{-j\beta}} = \pm\omega\sqrt{|\varepsilon||\mu|}e^{-j\frac{\alpha+\beta}{2}}$ o, en forma Cartesiana, $\kappa = \pm\omega\sqrt{|\varepsilon||\mu|} \left[\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - j\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \right]$:

$$\kappa = \kappa' - j\kappa''$$

donde $\kappa', \kappa'' > 0$. La Ec. 9.6 asume la forma

$$E_x(z) = C_1 e^{-\kappa'' z} e^{-j\kappa' z} + C_2 e^{\kappa'' z} e^{j\kappa' z} \quad (9.11)$$

Y la Ecuación 9.7 asume, a su vez, el aspecto:

$$\mathcal{E}(t, z) = [|C_1| e^{-\kappa'' z} \cos(\omega t - \kappa' z + \varphi_1) + |C_2| e^{\kappa'' z} \cos(\omega t + \kappa' z + \varphi_1)] \mathbf{a}_x \quad (9.12)$$

El primer término de la expresión 9.12 representa una **onda progresiva amortiguada**. El segundo término de la expresión 9.12 representa una **onda regresiva amortiguada**. κ' [rad/m] se denomina **constante o coeficiente de fase** y juega el mismo rol que el número de onda en el caso de un medio no absorbente. κ'' [Np/m] se denomina **constante o coeficiente de atenuación**. La atenuación L se mide en *neperios* [Np] o decibelios [dB]:

$$L = \ln \left[\frac{E(z)}{E(z + \Delta z)} \right] = \kappa'' \Delta z \text{ [Np]}$$

$$L = 20 \log \left[\frac{E(z)}{E(z + \Delta z)} \right] = 20 \log e^{\kappa'' \Delta z} = \kappa'' \Delta z 20 \log e \text{ [dB]}$$

La distancia en la que los campos, en un determinado medio, se atenúan un neperio se denomina **profundidad de penetración** y se suele designar con la letra δ . Fácilmente se comprueba que $\delta = (\kappa'')^{-1}$. Por otro lado, con relación a los campos complejos de la onda viajera progresiva, los mismos asumen la forma

$$\mathbf{E} = C_1 e^{-\kappa'' z} e^{-j\kappa' z} \mathbf{a}_x \quad (9.13)$$

$$\mathbf{H} = \frac{C_1}{\eta} e^{-\kappa'' z} e^{-j\kappa' z} \mathbf{a}_y \quad (9.14)$$

En este caso la impedancia intrínseca del medio es una cantidad compleja:

$$\eta = \sqrt{\frac{|\mu| e^{-j\beta}}{|\varepsilon| e^{-j\alpha}}} = \sqrt{\frac{|\mu|}{|\varepsilon|}} e^{-j\frac{(\beta-\alpha)}{2}} = |\eta| e^{-j\phi_\eta}$$

donde $\phi = (\beta - \alpha)/2$ y $-45^\circ \leq \phi \leq 45^\circ$.

En el dominio temporal las Ecs. 9.13 y 9.14 dan paso a las ecuaciones:

$$\mathcal{E}(t, z) = |C_1| e^{-\kappa'' z} \cos(\omega t - \kappa' z + \varphi_1) \mathbf{a}_x \quad (9.15)$$

$$\mathcal{H}(t, z) = \frac{|C_1|}{|\eta|} e^{-\kappa'' z} \cos(\omega t - \kappa' z + \varphi_1 + \phi_\eta) \mathbf{a}_y \quad (9.16)$$

En un medio absorbente los campos eléctrico y magnético ya no están en fase.

Medios absorbentes no magnéticos

Particular interés tienen para nosotros los medios absorbentes no magnéticos. Un medio absorbente no magnético se caracteriza por $\mu \simeq \mu_0$ mientras $\varepsilon'' \neq 0$ o $\sigma \neq 0$. Al rescribir la ecuación $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + j\omega\varepsilon\mathbf{E}$ de la forma:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H} &= [j\omega(\varepsilon' - j\varepsilon'') + \sigma] \mathbf{E} \\ &= j\omega \left[\varepsilon' - j \left(\varepsilon'' + \frac{\sigma}{\omega} \right) \right] \mathbf{E} \\ &= j\omega\varepsilon \mathbf{E} \end{aligned}$$

donde $\varepsilon = |\varepsilon|e^{-j\Delta}$, siendo $\text{tg}\Delta = \frac{\varepsilon'' + \frac{\sigma}{\omega}}{\varepsilon'}$. La tangente $\text{tg} \Delta$ se denomina **factor de pérdidas eléctricas**, mientras que al ángulo Δ se le denomina **ángulo de pérdidas eléctricas**. Al poner $\varepsilon \cong \varepsilon'$, lo cual equivale a suponer que las pérdidas en el dieléctrico se deben a una pequeña conductividad σ , el factor de pérdidas asume la forma $\text{tg} \Delta = \frac{\sigma}{\omega\varepsilon'}$. Se dan los siguientes casos:

$$\text{tg} \Delta \begin{cases} \gg 1, & \text{medio conductor;} \\ \ll 1, & \text{medio dieléctrico.} \end{cases} \quad (9.17)$$

Dieléctrico ligeramente absorbente Para un dieléctrico ($\sigma = 0$) ligeramente absorbente ($\varepsilon'' \neq 0$ y $\varepsilon'' \ll \varepsilon'$) se cumple¹:

$$\begin{aligned} \kappa &= \omega \sqrt{\mu(\varepsilon' - j\varepsilon'')} \\ &= \omega \sqrt{\mu\varepsilon' \left(1 - j\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}\right)} \\ &= \omega \sqrt{\mu\varepsilon'} \left[1 - j\frac{\varepsilon''}{2\varepsilon'} + \frac{1}{8} \left(\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}\right)^2 + j\frac{1}{16} \left(\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}\right)^3 + \dots\right] \\ &\approx \omega \sqrt{\mu\varepsilon'} \left(1 - j\frac{\varepsilon''}{2\varepsilon'}\right) \end{aligned}$$

En modo análogo:

$$\eta \approx \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon'}} \left(1 + j\frac{\varepsilon''}{2\varepsilon'}\right)$$

Buen conductor Para un buen conductor se cumple que $\varepsilon'' = 0$ y $\sigma \gg \omega\varepsilon$, y por tanto:

$$\begin{aligned} \kappa &= \omega \sqrt{\mu \left(\varepsilon - j\frac{\sigma}{\omega}\right)} \\ &= \sqrt{\omega^2 \mu \left(\varepsilon - j\frac{\sigma}{\omega}\right)} \\ &= \sqrt{\omega \mu (\omega\varepsilon - j\sigma)} \\ &\approx \sqrt{-j\omega \mu \sigma} \\ &\approx \sqrt{\frac{\omega \mu \sigma}{2}} (1 - j) \end{aligned}$$

En modo análogo:

$$\eta \approx \sqrt{\frac{\omega \mu}{2\sigma}} (1 + j)$$

Los resultados anteriores se resumen en el Cuadro 9.1.

¹ $(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \dots$, siendo n un número natural o una fracción.

Cuadro 9.1: Número de onda ($\kappa = \kappa' - j\kappa''$) e impedancia intrínseca ($\eta = \mathcal{R} + j\mathcal{X} = |\eta|e^{j\varphi_\eta}$).

	κ'	κ''	\mathcal{R}	\mathcal{X}
General	$\Re \{ \omega \sqrt{\mu\epsilon} \}$	$\Im \{ \omega \sqrt{\mu\epsilon} \}$	$\Re \{ \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \}$	$\Im \{ \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \}$
Sin pérdidas magnéticas	$\Re \{ \omega \sqrt{\mu_0\epsilon} \}$	$\Im \{ \omega \sqrt{\mu_0\epsilon} \}$	$\Re \{ \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon}} \}$	$\Im \{ \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon}} \}$
Dieléctrico perfecto	$\omega \sqrt{\mu\epsilon}$	0	$\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$	0
Buen dieléctrico	$\omega \sqrt{\mu\epsilon'}$	$\frac{\omega\epsilon''}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon'}}$	$\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon'}}$	$\frac{\epsilon''}{2\epsilon'} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon'}}$
Buen conductor	$\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}$	$\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}$	$\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}$	$\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}$

9.1.3. Onda plana arbitrariamente orientada

Para obtener las soluciones expresadas mediante las Ecs. (9.9) y (9.10), como se recordará, hemos tenido que orientar apropiadamente el sistema de referencia, haciendo coincidir el eje x con la dirección del campo eléctrico y el eje z con la dirección de propagación.

Tal sistema de referencia, aquél para el cual la expresión matemática del campo se simplifica al máximo, se denomina **sistema de referencia natural de la onda**.

¿Cómo se expresa una onda plana respecto a un sistema de referencia arbitrario?.

Dado un sistema de referencia natural, respecto al cual los campos de una onda plana quedan descritos como sigue:

$$\mathbf{E} = Ae^{-j\kappa z'} \mathbf{a}_{x'} \quad (9.18)$$

$$\mathbf{H} = \frac{A}{\eta} e^{-j\kappa z'} \mathbf{a}_{y'} \quad (9.19)$$

Fijado un segundo sistema de referencia, que denominaremos **sistema de referencia principal**, con el que el sistema de referencia natural forma los ángulos directores α_i , β_i y γ_i , con $i \in \{1, 2, 3\}$ (Fig. 9.1), los campos 9.18 y 9.19 quedarán expresados mediante las fórmulas:

$$\mathbf{E} = Ae^{-j\kappa(x \cos \gamma_1 + y \cos \gamma_2 + z \cos \gamma_3)} (\cos \alpha_1 \mathbf{a}_x + \cos \alpha_2 \mathbf{a}_y + \cos \alpha_3 \mathbf{a}_z) \quad (9.20)$$

$$\mathbf{H} = \frac{A}{\eta} e^{-j\kappa(x \cos \gamma_1 + y \cos \gamma_2 + z \cos \gamma_3)} (\cos \beta_1 \mathbf{a}_x + \cos \beta_2 \mathbf{a}_y + \cos \beta_3 \mathbf{a}_z) \quad (9.21)$$

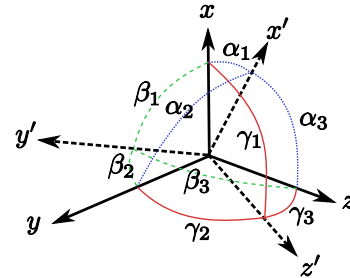


Figura 9.1: Ángulos directores α_i , β_i y γ_i , con $i \in \{1, 2, 3\}$ que definen la orientación del sistema de referencia natural de la onda plana (variables primadas) respecto del sistema de referencia principal (variables no primadas).

La ecuación $x \cos \gamma_1 + y \cos \gamma_2 + z \cos \gamma_3 = ctte.$ representa una familia de planos equifásicos. El argumento de los exponenciales de las Ecs. 9.20 y 9.21 se puede escribir como $\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r}$, siendo $\boldsymbol{\kappa} = \kappa(\cos \gamma_1 \mathbf{a}_x + \cos \gamma_2 \mathbf{a}_y + \cos \gamma_3 \mathbf{a}_z)$ el **vector de onda**, y $\mathbf{r} = x\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y + z\mathbf{a}_z$ el vector de posición de uno cualquiera de los puntos sobre un plano equifásico que dista z' metros del origen. La distancia de cualquier plano equifásico al origen se puede obtener como la proyección del vector \mathbf{r} , de uno cualquiera de sus puntos, sobre la dirección del vector de onda.

Problema

Una onda plana homogénea, proveniente desde la dirección $\theta = \pi/4$ y $\varphi = \pi/8$, viaja al 90% de la velocidad de la luz y se atenúa a razón de 1 Neperio por cada metro. El campo eléctrico de esta onda tiene una amplitud de 5 V/m en el plano equifásico a 5 metros del origen (viendo la onda venir hacia éste) y su fase cambia a razón de $\pi/16$ radianes cada metro. Se desea:

1. Al disponer de dos sondas de campo eléctrico, una en el punto $(2, 2, 2)$ y la otra en el punto $(-1, -1, 2)$, ambas conectadas a los puertos A y B de un osciloscopio, con sendas líneas de transmisión de igual longitud, dibuje las señales que deben ser vistas en la pantalla del osciloscopio indicando con precisión las **amplitudes** y las **diferencias de fase** de las dos señales. Para ello asuma que 1 V/m en la antena se transforma en un voltio en el puerto de entrada correspondiente del osciloscopio y seleccione una escala de tiempo que permita ver tres períodos de las señales.
2. Determine la λ y la δ del medio.

9.1.4. Velocidad de grupo

Los procesos monocromáticos no transportan información. La información es transportada por procesos policromáticos. El campo eléctrico resultante de la combinación de las ondas planas armónicas que conforman un proceso policromático se expresa mediante una transformación inversa de FOURIER $\mathcal{E}(t) = \mathfrak{F}^{-1}\{\mathbf{E}(\omega)\}$, donde $E(\omega)$ es el espectro del campo eléctrico

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (9.22)$$

En sentido ordinario $\mathcal{E}(t)$ puede consistir en una señal de información con ancho de banda $\Delta\omega$ con la que se modula una portadora a una frecuencia de radio (RF)

ω_0 para su transportación a través del espacio. Evidentemente $\mathcal{E}(t)$ es una cantidad real. En virtud de lo anterior, y tomando en cuenta que los parámetros intrínsecos del medio son, en general, función de la frecuencia, y por tanto $\kappa = \kappa(\omega)$, el campo eléctrico $\mathcal{E}(t, z)$, a z metros del origen de radiación de la onda plana, se podrá expresar usando la Ec. (9.22) de la forma

$$\mathcal{E}(t, z) = \Re \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} \mathbf{E}(\omega - \omega_0) e^{j[\omega t - \kappa(\omega)z]} d\omega \right\} \quad (9.23)$$

Si la variación de κ con la frecuencia es suave, $\kappa(\omega)$ podrá aproximarse mediante el siguiente desarrollo en serie de TAYLOR a partir de su valor $\kappa_0 = \kappa(\omega_0)$:

$$\kappa(\omega) = \kappa_0 + \left. \frac{d\kappa}{d\omega} \right|_{\omega_0} (\omega - \omega_0) + \text{T.O.S.} \quad (9.24)$$

por lo que la Ec. (9.23) se podrá reescribir:

$$\mathcal{E}(t, z) = \Re \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} \mathbf{E}(\omega - \omega_0) e^{j\left[\omega t - \left(\kappa_0 + \left. \frac{d\kappa}{d\omega} \right|_{\omega_0} (\omega - \omega_0) + \text{T.O.S.}\right)z\right]} d\omega \right\} \quad (9.25)$$

y si el ancho de banda $\Delta\omega$ se ajusta para que sea lo suficientemente estrecho como para que los T.O.S. se puedan despreciar, se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(t, z) &= \Re \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} \mathbf{E}(\omega - \omega_0) e^{j\left[\omega t - \left(\kappa_0 + \left. \frac{d\kappa}{d\omega} \right|_{\omega_0} (\omega - \omega_0)\right)z\right]} d\omega \right\} \\ &= \Re \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} \mathbf{E}(\omega - \omega_0) e^{j\omega\left(t - \left. \frac{d\kappa}{d\omega} \right|_{\omega_0} z\right)} d\omega e^{-j\left(\kappa_0 + \left. \frac{d\kappa}{d\omega} \right|_{\omega_0} \omega_0\right)z} \right\} \end{aligned}$$

tomando en cuenta que $\mathfrak{F}^{-1}\{X(\omega)e^{-j\omega t_0}\} = x(t - t_0)$ y $\mathfrak{F}^{-1}\{X(\omega - \omega_0)\} = x(t)e^{j\omega_0 t}$ y si designamos con ν_{gr} al inverso de la cantidad $d\kappa/d\omega|_{\omega_0}$, $\nu_{gr} = d\omega/d\kappa$:

$$\mathcal{E}(t, z) = \Re \left\{ \mathcal{E} \left(t - \frac{z}{\nu_{gr}} \right) e^{j\omega_0\left(t - \frac{z}{\nu_{gr}}\right)} e^{-j\left(\kappa_0 + \frac{\omega_0}{\nu_{gr}}\right)z} \right\} \quad (9.26)$$

$$= \mathcal{E} \left(t - \frac{z}{\nu_{gr}} \right) \cos(\omega_0 t - \kappa_0 z) \quad (9.27)$$

De la Ecuación (9.27) se concluye que la *información* contenida en el campo eléctrico se propaga a la velocidad ν_{gr} sin distorsión, pero acumulando un retardo par a $\frac{z}{\nu_{gr}}$ segundos. La **velocidad de grupo**, ν_{gr} , es la velocidad común de los armónicos que conforman la señal de información, y se la puede definir si y solo si $\kappa(\omega)$ varía linealmente con la frecuencia en un entorno no menor al ancho de banda de la señal alrededor de la frecuencia de portadora.

9.2. Incidencia perpendicular

En esta sección se analizará el problema de la incidencia perpendicular [5] de una onda plana sobre la interfaz, también plana, entre dos medios de propiedades electromagnéticas distintas. Este análisis se realizará inicialmente en forma analítica, en el dominio de la frecuencia (Sec. 9.2.1), y posteriormente en forma numérica (Sec. 9.2.5), en el dominio del tiempo utilizando el Método de las Diferencias Finitas en el Dominio del Tiempo (FDTD).

9.2.1. Incidencia perpendicular en el dominio de la frecuencia

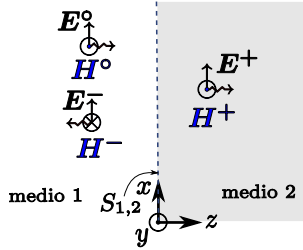


Figura 9.2: Incidencia perpendicular.

Dados dos medios simples de extensión infinita, contiguos, a través de una superficie plana, de propiedades intrínsecas (ε_1, μ_1) y (ε_2, μ_2) , respectivamente, como se ilustra en la Fig. 9.2.

Al propagarse una onda plana en el medio 1, en dirección del medio 2, tal que incida perpendicularmente sobre la superficie plana de separación de ambos medios, se tiene en el medio 1:

$$\mathbf{E}_1 = [C_1 e^{-j\kappa_1 z} + C_2 e^{j\kappa_1 z}] \mathbf{a}_x \quad (9.28)$$

$$\mathbf{H}_1 = \frac{1}{\eta_1} [C_1 e^{-j\kappa_1 z} - C_2 e^{j\kappa_1 z}] \mathbf{a}_y \quad (9.29)$$

y en el medio 2:

$$\mathbf{E}_2 = C_3 e^{-j\kappa_2 z} \mathbf{a}_x \quad (9.30)$$

$$\mathbf{H}_2 = \frac{C_3}{\eta_2} e^{-j\kappa_2 z} \mathbf{a}_y \quad (9.31)$$

Se conviene en denominar onda incidente (medio 1):

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^o &= C_1 e^{-j\kappa_1 z} \mathbf{a}_x \\ \mathbf{H}^o &= \frac{C_1}{\eta_1} e^{-j\kappa_1 z} \mathbf{a}_y \end{aligned}$$

onda reflejada (medio 1):

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^- &= C_2 e^{j\kappa_1 z} \mathbf{a}_x \\ \mathbf{H}^- &= -\frac{C_2}{\eta_1} e^{j\kappa_1 z} \mathbf{a}_y \end{aligned}$$

y onda refractada o transmitida (medio 2):

$$\begin{aligned}\mathbf{E}^+ &= C_3 e^{-j\kappa_2 z} \mathbf{a}_x \\ \mathbf{H}^+ &= \frac{C_3}{\eta_2} e^{-j\kappa_2 z} \mathbf{a}_y\end{aligned}$$

En la interfaz, los campos están obligados a satisfacer las condiciones de borde:

$$E_1(0) = E_2(0) \quad (9.32)$$

$$H_1(0) = H_2(0) \quad (9.33)$$

de donde:

$$C_1 + C_2 = C_3 \quad (9.34)$$

$$\frac{C_1}{\eta_1} - \frac{C_2}{\eta_1} = \frac{C_3}{\eta_2} \quad (9.35)$$

de tal suerte que al definir los denominados coeficientes de reflexión, ρ , y de refracción, τ , de la interfaz:

$$\rho = \frac{E^-(0)}{E^o(0)} = \frac{C_2}{C_1} \quad (9.36)$$

$$\tau = \frac{E^+(0)}{E^o(0)} = \frac{C_3}{C_1} \quad (9.37)$$

y al sustituir las Ecs. (9.36) y (9.37) en las Ecs. (9.34) y (9.35) se obtiene:

$$1 + \rho = \tau \quad (9.38)$$

$$\frac{1}{\eta_1} - \frac{\rho}{\eta_1} = \frac{\tau}{\eta_2} \quad (9.39)$$

de donde:

$$\rho = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_1 + \eta_2} \quad (9.40)$$

$$\tau = \frac{2\eta_2}{\eta_1 + \eta_2} \quad (9.41)$$

Con estos resultados las Ecs. (9.28) y (9.29) del medio 1 se pueden reescribir de la siguiente manera:

$$\mathbf{E}_1 = C_1 \left[e^{-j\kappa_1 z} + \rho e^{j\kappa_1 z} \right] \mathbf{a}_x \quad (9.42)$$

$$\mathbf{H}_1 = \frac{C_1}{\eta_1} \left[e^{-j\kappa_1 z} - \rho e^{j\kappa_1 z} \right] \mathbf{a}_y \quad (9.43)$$

y las Ecs. (9.30) y (9.31) del medio 2 de esta otra:

$$\mathbf{E}_2 = C_1 \tau e^{-j\kappa_2 z} \mathbf{a}_x \quad (9.44)$$

$$\mathbf{H}_2 = \frac{C_1 \tau}{\eta_2} e^{-j\kappa_2 z} \mathbf{a}_y \quad (9.45)$$

quedando por determinar una única constante: C_1 .

Las soluciones encontradas admiten la siguiente interpretación física: una onda plana que se propaga en un medio simple, al incidir perpendicularmente sobre la superficie plana de separación con un segundo medio, engendra dos nuevas ondas planas: una que se refracta en éste, y otra que se refleja en el primero. Todas las ondas, la incidente, la refractada y la reflejada, se combinan en la interfaz satisfaciendo las condiciones de borde.

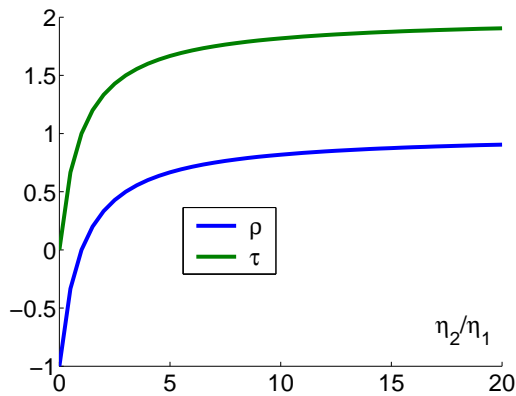


Figura 9.3: Comportamiento de ρ y τ en función de η_2/η_1 .

Esta circunstancia física nos permite expresar las ondas refractada y reflejada, en función del valor de (los campos de) la onda incidente en la interfaz, mediante la introducción de los coeficientes de refracción y reflexión, respectivamente. Estos coeficientes quedan luego definidos en función de las propiedades intrínsecas de los medios. Todo lo cual permite afirmar que, al variar las propiedades electromagnéticas de los medios, se obtendrán diferentes niveles de reflexión y refracción. Intuitivamente, por ahora, se dirá que a mayor diferencia entre los medios,

mayor reflexión y menor refracción, y a mayor parecido, menor reflexión y mayor refracción. Ésto será comprobado analíticamente.

Sobre el campo resultante en el medio 2 no hay nada nuevo que decir, pues se trata de una onda plana homogénea progresiva más. En el medio 1, sin embargo, tiene lugar un nuevo proceso, un campo que presenta, en principio, una *estructura* novedosa respecto de la onda plana progresiva simple. A partir de las Ecs. (9.42) y (9.43), nos podemos hacer una idea acerca de la estructura del campo resultante en el medio 1. Para hacer ésto, se dará un vistazo al comportamiento de los coeficientes de reflexión y transmisión en función de la relación entre las impedancias intrínsecas de los medios η_2/η_1 . En la Fig. 9.3 se ilustra dicho comportamiento. Así, se observa que el coeficiente de reflexión ρ asume valores entre -1 y 1 : $-1 \leq \rho \leq 1$, mientras el coeficiente de transmisión τ entre 0 y 2 : $0 \leq \tau \leq 2$.

La estructura del campo resultante en el medio 1 se puede analizar dividiendo el problema en tres casos distintos: el caso $|\rho| = 0$, denominado de adaptación, el caso $|\rho| = 1$, de desadaptación total, y el caso $0 < |\rho| < 1$, de adaptación, o desadaptación, intermedia.

9.2.2. Caso $|\rho| = 0$

Siendo el coeficiente de reflexión nulo, no ocurre ninguna reflexión de la onda incidente en la interfaz y toda ella se transmite al segundo miembro. La adaptación total se logra imponiendo $\eta_2 = \eta_1$. La estructura del campo resultante en el medio 1 no difiere del de la onda plana homogénea original ya que $C_2 = 0$.

9.2.3. Caso $|\rho| = 1$

Con $\eta_2 = 0$ (siendo el medio 2 un conductor perfecto), o con $\eta_2/\eta_1 \rightarrow \infty$, se logra que $|\rho| = 1$. En este caso se dice que los medios están desadaptados en sentido extremo y la onda incidente es completamente reflejada por la interfaz, tendiendo a cero los campos refractados. La estructura del campo en el medio 1 forma un patrón denominado de onda estacionaria que se caracteriza por que no hay transportación de energía en ninguna dirección. La onda resultante en el medio 1, para $\rho = -1$, asume, por ejemplo, la forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 &= C_1 [e^{-j\kappa_1 z} - e^{j\kappa_1 z}] \mathbf{a}_x & \mathbf{H}_1 &= \frac{C_1}{\eta_1} [e^{-j\kappa_1 z} + e^{j\kappa_1 z}] \mathbf{a}_y \\ &= -2jC_1 \sin(\kappa_1 z) \mathbf{a}_x & &= \frac{2C_1}{\eta_1} \cos(\kappa_1 z) \mathbf{a}_y \end{aligned}$$

Al expresar los campos en el dominio temporal:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1(t, z) &= \Re\{\mathbf{E}_1 e^{j\omega t}\} & \mathcal{H}_1(t, z) &= \Re\{\mathbf{H}_1 e^{j\omega t}\} \\ &= 2|C_1| \sin(\kappa_1 z) \sin(\omega t + \phi_1) \mathbf{a}_x & &= \frac{2|C_1|}{\eta_1} \cos(\kappa_1 z) \cos(\omega t + \phi_1) \mathbf{a}_y \end{aligned}$$

donde $C_1 = |C_1| e^{j\phi_1}$, se observa que la solución ya no progresa en ninguna dirección, sino que oscila estacionariamente. Al mismo tiempo, se observa que el vector de POYNTING es imaginario puro:

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \frac{1}{2} \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \\ &= -\frac{2j|C_1|^2}{\eta_1} \sin(\kappa_1 z) \cos(\kappa_1 z) \mathbf{a}_z \end{aligned} \quad (9.46)$$

por lo que los campos no transportan energía.

9.2.4. Caso $0 < |\rho| < 1$

Este caso se presenta para cualquier valor de $|\rho|$ distinto de los anteriores ($|\rho| \neq 0, 1$). En esta circunstancia una fracción del campo incidente se refleja y otra se refracta. Usando la Ec. (9.38) en las Ecs. (9.42) y (9.43) se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}_1 &= C_1 [e^{-j\kappa_1 z} + \rho e^{j\kappa_1 z}] \mathbf{a}_x & \mathbf{H}_1 &= \frac{C_1}{\eta_1} [e^{-j\kappa_1 z} - \rho e^{j\kappa_1 z}] \mathbf{a}_y \\
 &= C_1 [(\tau - \rho)e^{-j\kappa_1 z} + \rho e^{j\kappa_1 z}] \mathbf{a}_x & &= \frac{C_1}{\eta_1} [(\tau - \rho)e^{-j\kappa_1 z} - \rho e^{j\kappa_1 z}] \mathbf{a}_y \\
 &= \underbrace{C_1 \tau e^{-j\kappa_1 z} \mathbf{a}_x}_{\text{onda progresiva}} + \underbrace{2jC_1 \rho \sin(\kappa_1 z) \mathbf{a}_x}_{\text{onda estacionaria}} & &= \underbrace{\frac{C_1}{\eta_1} \tau e^{-j\kappa_1 z} \mathbf{a}_y}_{\text{onda progresiva}} - \underbrace{\frac{2C_1}{\eta_1} \rho \cos(\kappa_1 z) \mathbf{a}_y}_{\text{onda estacionaria}}
 \end{aligned} \tag{9.47}$$

donde se observa la coexistencia de una onda progresiva y un patrón de onda estacionaria. Este último se forma mediante la combinación de una fracción de la onda incidente y la onda reflejada. La onda progresiva, en cambio, existe gracias a la refracción de la porción restante de la onda incidente.

En este caso, que se puede considerar como el más general, ya que la onda resultante no es del todo progresiva, se introduce el concepto de impedancia de onda, $Z(z)$, como la relación entre las amplitudes complejas de los campos en z [12]:

$$\begin{aligned}
 Z(z)|_{z=-\ell} &= \frac{E_x(-\ell)}{H_y(-\ell)} \\
 &= \eta_1 \frac{(e^{j\kappa_1 \ell} + \rho e^{-j\kappa_1 \ell})}{(e^{j\kappa_1 \ell} - \rho e^{-j\kappa_1 \ell})} \\
 &= \eta_1 \frac{\eta_2 \cos(\kappa_1 \ell) + j\eta_1 \sin(\kappa_1 \ell)}{\eta_1 \cos(\kappa_1 \ell) + j\eta_2 \sin(\kappa_1 \ell)}
 \end{aligned}$$

donde ℓ es la distancia al plano de separación entre los medios. Vale la pena indicar que con esta formulación se puede resolver el problema de la adaptación de un panel dieléctrico utilizado para construir las bóvedas dieléctricas de protección de las antenas de microondas. Obsérvese que al medir $Z(\ell)$ a $\lambda_1/2$ metros de la interfaz se obtiene:

$$\begin{aligned}
 Z(\lambda_1/2) &= \eta_1 \frac{\eta_2 \cos[(2\pi/\lambda_1)(\lambda_1/2)] + j\eta_1 \sin[(2\pi/\lambda_1)(\lambda_1/2)]}{\eta_1 \cos[(2\pi/\lambda_1)(\lambda_1/2)] + j\eta_2 \sin[(2\pi/\lambda_1)(\lambda_1/2)]} \\
 &= \eta_1 \frac{\eta_2(-1) + j\eta_1(0)}{\eta_1(-1) + j\eta_2(0)} \\
 &= \eta_2
 \end{aligned}$$

de modo que a media longitud de onda, correspondiente al medio 1, o a una distancia que sea un múltiplo entero de ésta, la impedancia de onda $Z(\lambda_1/2)$ coincide con la impedancia intrínseca del segundo medio.

9.2.5. Incidencia perpendicular en el dominio del tiempo: método FDTD en una dimensión

Con el propósito de ilustrar en el dominio del tiempo todo cuanto se ha dicho acerca de la incidencia perpendicular, se ha escrito `fdtd1d`, un código en MATLAB® (ver Sección 9.6) en el que se ha programado el Método de las Diferencias Finitas en el Dominio Temporal en una dimensión [22]. Vale la pena observar que, mientras la solución descrita en la Sec. 9.2.1 se encuentra en el dominio de la frecuencia, y representa la solución en régimen estacionario, el método FDTD proporciona una solución en el dominio del tiempo, y por lo tanto incluye el régimen transitorio del problema.

En el Método de las Diferencias Finitas en el Dominio del Tiempo (*Finite Differences Time Domain* –FDTD–) las derivadas se aproximan mediante cocientes de diferencias centrales siguiendo el esquema propuesto originalmente por YEE, intercalando tanto en el espacio como en el tiempo las componentes de los campos eléctrico y magnético [23]. La estructura espacial del método se ajusta a la denominada *celda de YEE*, y la estructura temporal sigue un patrón conocido como *salto de rana*.

Ecuaciones de MAXWELL

Las ecuaciones de Maxwell en un medio simple de propiedades intrínsecas ε , μ , y σ :

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \nabla \times \mathbf{H} - \frac{\sigma}{\varepsilon} \mathbf{E} \quad (9.48)$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{E} \quad (9.49)$$

comprenden seis ecuaciones escalares:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_x}{\partial t} &= \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) - \frac{\sigma}{\varepsilon} E_x & \frac{\partial H_x}{\partial t} &= \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial E_y}{\partial t} &= \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) - \frac{\sigma}{\varepsilon} E_y & \frac{\partial H_y}{\partial t} &= \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial E_z}{\partial t} &= \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) - \frac{\sigma}{\varepsilon} E_z & \frac{\partial H_z}{\partial t} &= \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

Si se asume un campo eléctrico del tipo $\mathbf{E} = E_x(t, z)\mathbf{a}_x$, las ecuaciones anteriores se reducen a:

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = -\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial H_y}{\partial z} - \frac{\sigma}{\varepsilon} E_x \quad (9.50)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial E_x}{\partial z} \quad (9.51)$$

Las Ecuaciones (9.50) y (9.51) definen una onda plana homogénea con el campo eléctrico en la dirección de \mathbf{a}_x y el campo magnético en la dirección de \mathbf{a}_y que se propaga en la dirección de \mathbf{a}_z .

Discretización de las ecuaciones de onda plana y de su dominio

Discretización del dominio Las Ecuaciones (9.50) y (9.51) están definidas en un dominio bidimensional espacio-tiempo.

Definiremos entonces un paso para el espacio, Δz , y un paso para el tiempo, Δt , y definiremos una malla en este dominio con K puntos para el espacio y T puntos para el tiempo, para un total de $K \times T$ puntos de observación.

En estos puntos estimaremos los campos, conviniendo en escribir:

$$E_x^n(\kappa) = E_x(n\Delta t, \kappa\Delta z) \quad \text{con } n \text{ y } \kappa \text{ enteros}$$

El campo E_x se estimará en los puntos $\{\dots, \kappa, \kappa + 1, \dots\}$ en los instantes $\{\dots, n - \frac{1}{2}, n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}, \dots\}$, mientras que el campo H_y se estimará en los puntos $\{\dots, \kappa - \frac{1}{2}, \kappa + \frac{1}{2}, \dots\}$ en los instantes $\{\dots, n, n + 1, \dots\}$.

Con este esquema los valores estimados de los campos se entrelazan tanto en el tiempo como en el espacio. Así, el campo H_y precede al campo E_x en el espacio, y E_x precede a H_y en el tiempo. En la Fig. 10.2 se muestra como, procediendo de esta forma, se crean en realidad dos dominios solapados, uno para el campo eléctrico y otro para el campo magnético.

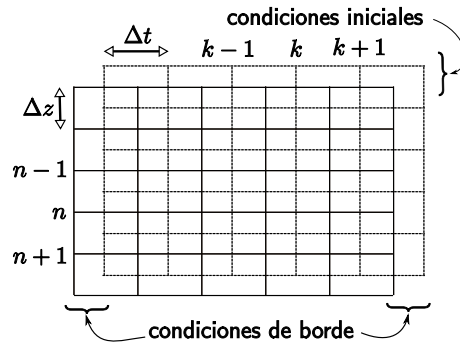


Figura 9.4: Dominios solapados . Sobre la grilla de líneas segmentadas se estimará E_x y sobre la grilla de líneas continuas H_y .

Discretización de las ecuaciones Las Ecuaciones (9.50) y (9.51) se aproximan mediante diferencias centrales:

$$\frac{E_x^{n+\frac{1}{2}}(\kappa) - E_x^{n-\frac{1}{2}}(\kappa)}{\Delta t} = -\frac{1}{\varepsilon} \frac{H_y^n(\kappa + 1/2) - H_y^n(\kappa - 1/2)}{\Delta z} - \frac{\sigma}{\varepsilon} \frac{E_x^{n+\frac{1}{2}}(\kappa) + E_x^{n-\frac{1}{2}}(\kappa)}{2} \quad (9.52)$$

$$\frac{H_y^{n+1}(\kappa + 1/2) - H_y^n(\kappa + 1/2)}{\Delta t} = -\frac{1}{\mu} \frac{E_x^{n+\frac{1}{2}}(\kappa + 1) - E_x^{n+\frac{1}{2}}(\kappa)}{\Delta z} \quad (9.53)$$

de las cuales se despejan $E_x^{n+\frac{1}{2}}(\kappa)$ y $H_y^{n+1}(\kappa + 1/2)$:

$$E_x^{n+\frac{1}{2}}(\kappa) = \frac{\left[1 - \frac{\sigma \Delta t}{2\varepsilon}\right]}{\left[1 + \frac{\sigma \Delta t}{2\varepsilon}\right]} E_x^{n-\frac{1}{2}}(\kappa) - \frac{1}{\varepsilon \left[1 + \frac{\sigma \Delta t}{2\varepsilon}\right]} \frac{\Delta t}{\Delta z} \left[H_y^n(\kappa + 1/2) - H_y^n(\kappa - 1/2) \right] \quad (9.54)$$

$$H_y^{n+1}(\kappa + 1/2) = H_y^n(\kappa + 1/2) - \frac{1}{\mu} \frac{\Delta t}{\Delta z} \left[E_x^{n+\frac{1}{2}}(\kappa + 1) - E_x^{n+\frac{1}{2}}(\kappa) \right] \quad (9.55)$$

Dando valores a las constantes ε , μ , y σ podemos simular la propagación de la onda en diferentes medios simples no dispersivos. Para medios no absorbentes la Ec. (10.2) se simplifica de la manera siguiente:

$$E_x^{n+\frac{1}{2}}(\kappa) = E_x^{n-\frac{1}{2}}(\kappa) - \frac{1}{\varepsilon} \frac{\Delta t}{\Delta z} \left[H_y^n(\kappa + 1/2) - H_y^n(\kappa - 1/2) \right] \quad (9.56)$$

la cual es similar a la Ec. (10.3).

Otras consideraciones numéricas

Escalamiento del campo eléctrico Debido a la enorme diferencia en órdenes de magnitud de las constantes ε_0 y μ_0 del vacío, el campo eléctrico E_x se suele escalar por el inverso de la impedancia intrínseca del vacío $\eta_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$:

$$\tilde{E} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E$$

De esta manera, para medios no magnéticos ($\mu = \mu_0$), las Ecs. (10.2) y (10.3) asumen la forma:

$$\tilde{E}_x^{n+\frac{1}{2}}(\kappa) = \frac{\left[1 - \frac{\sigma \Delta t}{2\varepsilon}\right]}{\left[1 + \frac{\sigma \Delta t}{2\varepsilon}\right]} \tilde{E}_x^{n-\frac{1}{2}}(\kappa) - \frac{1}{\varepsilon_r c_0 \left[1 + \frac{\sigma \Delta t}{2\varepsilon}\right]} \frac{\Delta t}{\Delta z} \left[H_y^n(\kappa + 1/2) - H_y^n(\kappa - 1/2) \right] \quad (9.57)$$

$$H_y^{n+1}(\kappa + 1/2) = H_y^n(\kappa + 1/2) - \frac{1}{c_0} \frac{\Delta t}{\Delta z} \left[\tilde{E}_x^{n+\frac{1}{2}}(\kappa + 1) - \tilde{E}_x^{n+\frac{1}{2}}(\kappa) \right] \quad (9.58)$$

donde $c_0 = 1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$ es la velocidad de las ondas electromagnéticas en el vacío y ε_r es la permitividad relativa del medio.

Paso temporal Δt mágico El paso temporal Δt se debe seleccionar de manera que el método sea estable. La condición de estabilidad se conoce como condición de COURANT :

$$\Delta t \leq \frac{\Delta z}{\sqrt{nc_0}}$$

donde n es el orden del dominio espacial ($n = 1$ en el presente caso). Además, en FDTD en una dimensión espacial, existe un valor de Δt , conocido como *magic step*, para el cual no se manifiesta la dispersión numérica [24]. Este valor es:

$$\Delta t = \frac{\Delta z}{2c_0} \quad (9.59)$$

Usando este paso temporal, las Ecs. (10.4) y (10.5) se simplifican de la manera siguiente:

$$\tilde{E}_x^{n+\frac{1}{2}}(\kappa) = \frac{\left[1 - \frac{\sigma\Delta t}{2\varepsilon}\right]}{\left[1 + \frac{\sigma\Delta t}{2\varepsilon}\right]} \tilde{E}_x^{n-\frac{1}{2}}(\kappa) - \frac{1/2}{\varepsilon_r \left[1 + \frac{\sigma\Delta t}{2\varepsilon}\right]} \left[H_y^n(\kappa + 1/2) - H_y^n(\kappa - 1/2) \right] \quad (9.60)$$

$$H_y^{n+1}(\kappa + 1/2) = H_y^n(\kappa + 1/2) - \frac{1}{2} \left[\tilde{E}_x^{n+\frac{1}{2}}(\kappa + 1) - \tilde{E}_x^{n+\frac{1}{2}}(\kappa) \right] \quad (9.61)$$

Paso espacial El paso espacial Δz se debe escoger lo suficiente pequeño como para obtener una solución lo suficientemente precisa. En general, el nivel de precisión dependerá del problema. Una buena regla consiste en tomar como mínimo 10 muestras por longitud de onda, tomando como referencia, para señales policromáticas, la menor longitud de onda.

Condiciones de borde absorbente Como modelar discretamente una región ilimitada es imposible, es necesario añadir, en los extremos del dominio espacial, ciertas condiciones, denominadas absorbentes, de tal suerte que, al incidir sobre tales extremos, las ondas no se reflejen. Estas condiciones de borde absorbentes se obtienen forzando el valor del campo en los extremos al valor que tendrían si la onda se propagara más allá de ellos. En el vacío esto se consigue poniendo en el extremo $z = 0$, por ejemplo [22]:

$$E_x^n(0) = E_x^{n-2}(1)$$

9.2.6. Resultados de simulación

Con el propósito de estudiar los casos de adaptación descritos anteriormente en el dominio del tiempo, la rutina `fdtd1d` se ha corrido simulando cuatro escenarios

diferentes. La función `fdtd1d` presenta dos parámetros de entrada: `epsir2` y `sigma2`, la permitividad eléctrica y la conductividad del segundo medio, respectivamente. La interfaz entre los medios se encuentra justo en el centro del dominio espacial. La descripción de los escenarios de simulación y los resultados obtenidos se presentan a continuación.

Caso 1: adaptación `-fdtd1d(1,0)-`

En la Figura 9.5 se muestra un fotograma de la simulación de una onda plana que al propagarse desde un medio incide perpendicularmente sobre la interfaz plana de separación con otro medio de igual impedancia intrínseca.

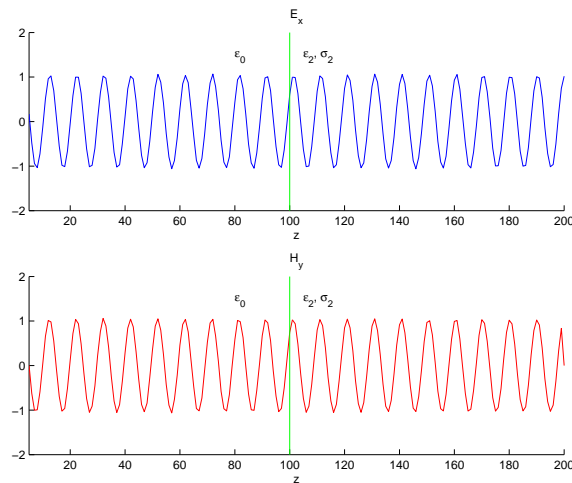


Figura 9.5: Fotograma de la distribución de amplitudes de los campos E_x y H_y bajo adaptación total.

Se recomienda correr la rutina `fdtd1d(1,0)` desde MATLAB para visionar la simulación.

Caso 2: desadaptación parcial, reflexión parcial `-fdtd1d(4,0)-`

En la Figura 9.6 se muestra un fotograma de la simulación de una onda plana que al propagarse desde un medio incide perpendicularmente sobre la interfaz plana de separación con otro medio con distinta impedancia intrínseca.

Se recomienda correr la rutina `fdtd1d(3,0)` desde MATLAB para visionar la simulación completa.

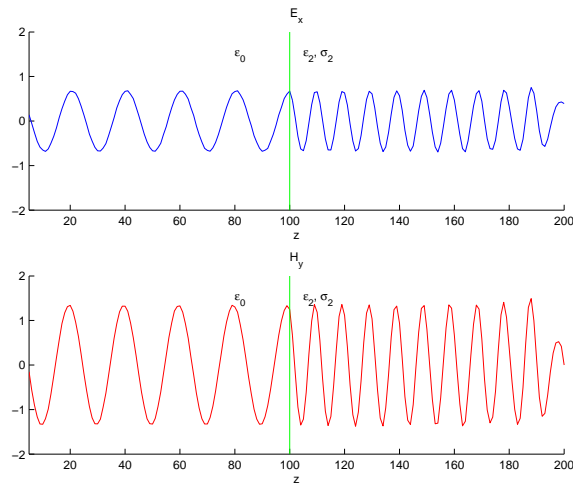


Figura 9.6: Fotograma de la distribución de amplitudes de los campos E_x y H_y bajo desadaptación parcial.

Caso 3: desadaptación parcial con absorción –`fdtd1d(4,0.04)`–

En la Figura 9.7 se muestra un fotograma de la simulación de una onda plana que al propagarse desde un medio incide perpendicularmente sobre la interfaz plana de separación con otro medio de distinta impedancia intrínseca y absorbente.

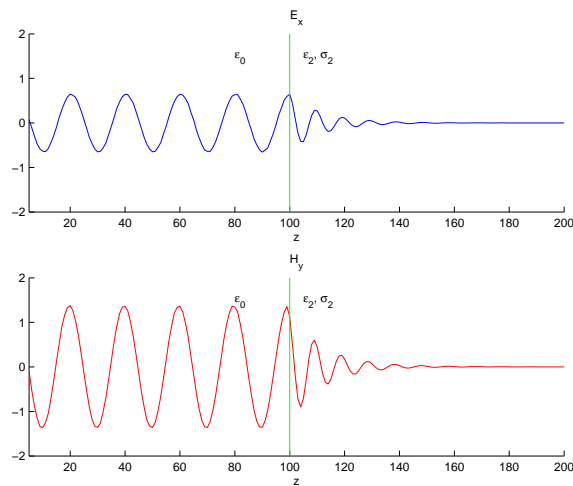


Figura 9.7: Fotograma de la distribución de amplitudes de los campos E_x y H_y bajo desadaptación parcial y absorción.

Se recomienda correr la rutina `fdtd1d(4,0.04)` desde MATLAB para visionar la simulación completa.

Caso 4: reflexión total –`fdtd1d(4,100)`–

En la Figura 9.8 se muestra un fotograma de la simulación de una onda plana que al propagarse desde un medio incide perpendicularmente sobre la interfaz plana de separación con otro medio de distinta impedancia intrínseca y altamente absorbente. La enorme absorción del segundo medio produce una reflexión total.

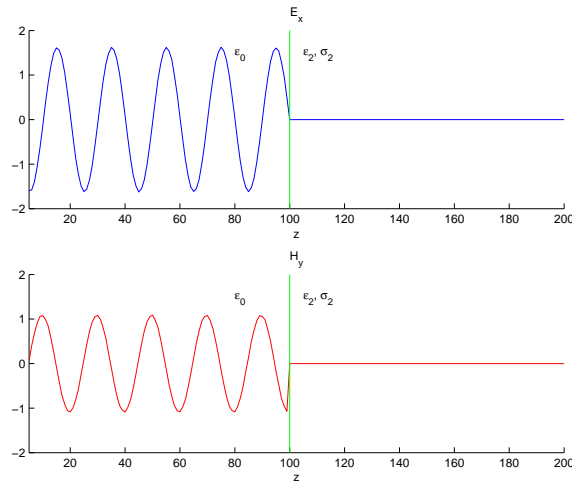


Figura 9.8: Fotograma de la distribución de amplitudes de los campos E_x y H_y bajo reflexión total.

Se recomienda correr la rutina `fdtd1d(4,100)` desde MATLAB para visionar la simulación completa.

9.3. Leyes de SNELL

La incidencia oblicua [5] de una onda plana sobre la superficie de separación (también plana) entre dos medios simples da lugar a la dispersión de la onda incidente por la aparición de una onda reflejada y una onda refractada.

La primera permanece en el medio de la incidente y la otra se transmite al segundo medio. Con base en la Fig. 9.9 se definen los ángulos y parámetros de interés para la descripción matemática del problema general de la incidencia oblicua. Los ejes z° , z^- y z^+ constituyen los ejes z naturales de las ondas incidente, reflejada y transmitida, respectivamente. Los ejes z° , z^- y z^+ naturales respectivamente forman los ángulos de incidencia φ , de reflexión ψ y de refracción θ con el eje z principal.

Todos los ejes naturales yacen sobre un mismo plano denominado plano de incidencia, el cual es ortogonal a la superficie de separación de los medios. Respecto

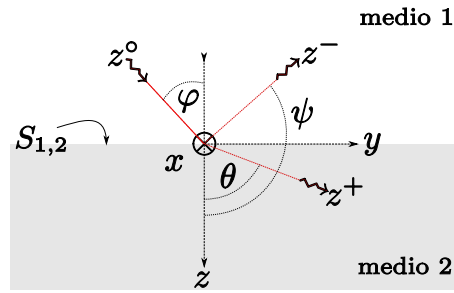


Figura 9.9: En la superficie de separación de dos medios se define un sistema de referencia principal. Respecto a la normal a la superficie (eje z) se definen los ángulos de incidencia φ , de reflexión ψ y de refracción θ .

al sistema de referencia principal, los ejes z^o , z^- y z^+ forman los siguientes ángulos directores:

$$\begin{array}{lll} \gamma_1^o = \widehat{z^o x} = 90^\circ & \gamma_1^- = \widehat{z^- x} = 90^\circ & \gamma_1^+ = \widehat{z^+ x} = 90^\circ \\ \gamma_2^o = \widehat{z^o y} = 90^\circ - \varphi & \gamma_2^- = \widehat{z^- y} = \psi - 90^\circ & \gamma_2^+ = \widehat{z^+ y} = 90^\circ - \theta \\ \gamma_3^o = \widehat{z^o z} = \varphi & \gamma_3^- = \widehat{z^- z} = \psi & \gamma_3^+ = \widehat{z^+ z} = \theta \end{array}$$

Mediante substitución directa de los valores indicados en el cuadro anterior se obtienen las siguientes funciones exponenciales:

$$f^o(y, z) = e^{-j\kappa_1(y \sin \varphi + z \cos \varphi)}$$

$$f^-(y, z) = e^{-j\kappa_1(y \sin \psi + z \cos \psi)}$$

$$f^+(y, z) = e^{-j\kappa_2(y \sin \theta + z \cos \theta)}$$

Para que las condiciones de borde sean satisfechas, es necesario que las funciones f^o , f^- y f^+ sean funciones idénticas de la variable y sobre la superficie de separación de los dos medios (¿por qué?):

$$f^o(y, 0) = f^-(y, 0) = f^+(y, 0)$$

Esta doble ecuación contiene implícitamente las leyes de SNELL:

$$\text{1era. ley de SNELL: } f^o(y, 0) = f^-(y, 0) \Rightarrow \sin \varphi = \sin \psi$$

$$\text{2da. ley de SNELL: } f^o(y, 0) = f^+(y, 0) \Rightarrow \kappa_1 \sin \varphi = \kappa_2 \sin \theta$$

9.3.1. 1era ley de SNELL

De acuerdo a la Figura 9.9: $0 \leq \varphi \leq 90^\circ$ y $90^\circ \leq \psi \leq 180^\circ$, la primera ley de SNELL conlleva a $180^\circ - \psi = \varphi$, por lo que el ángulo de reflexión, medido respecto a la normal de la superficie de separación, es igual al ángulo de incidencia.

9.3.2. 2da. ley de SNELL

La segunda ley de SNELL, por otro lado, establece

$$\frac{\sin \theta}{\sin \varphi} = \frac{\kappa_1}{\kappa_2} \quad (9.62)$$

Para dos medios no absorbentes se define el índice de refracción $n = \sqrt{\epsilon_r \mu_r}$, por tanto

$$\frac{\sin \theta}{\sin \varphi} = \frac{n_1}{n_2} = n_{12} \quad (9.63)$$

donde $n_{12} = n_1/n_2$.

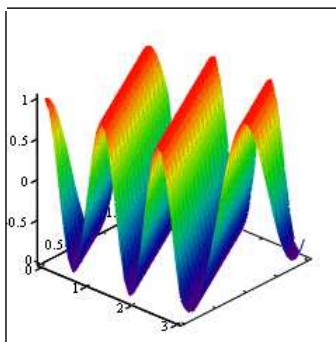
9.3.3. Estudios de casos

Se dan dos casos interesantes: cuando el medio 1 es más denso ópticamente que el medio 2: $n_1 > n_2$, y cuando ocurre lo contrario: $n_1 < n_2$.

Caso $n_1 > n_2$

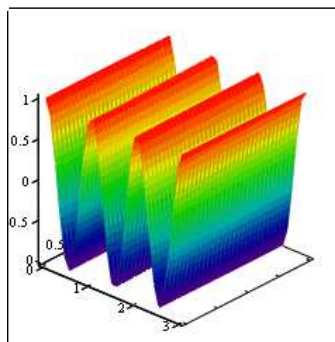
En este caso, a paridad de ángulo de incidencia φ , mientras $n_{12} \uparrow$ ($\sin \theta > \sin \varphi$) $\Rightarrow \theta \uparrow$. A paridad de n_{12} , mientras $\varphi \uparrow \Rightarrow \theta \uparrow$. Existe un ángulo φ_c para el cual $\theta = 90^\circ$. El ángulo φ_c se denomina ángulo crítico:

$$\varphi_c = \sin^{-1} \left(\frac{n_2}{n_1} \right)$$



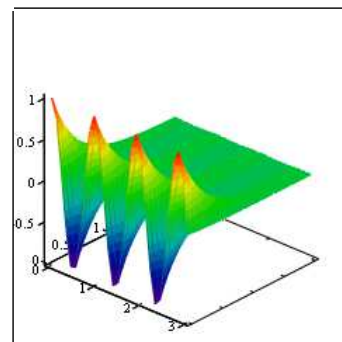
M2

(a) Fotografía de la distribución de la amplitud en el plano xy en el medio 2 de la Figura 9.9 para el caso $\varphi < \varphi_c$



M2

(b) Fotografía de la distribución de la amplitud en el plano xy en el medio 2 de la Figura 9.9 para el caso $\varphi = \varphi_c$.



M2

(c) Fotografía de la distribución de la amplitud en el plano xy en el medio 2 de la Figura para el caso $\varphi > \varphi_c$.

Figura 9.10: Subcasos para $n_1 > n_2$.

Para ángulos $\varphi > \varphi_c$, θ es complejo. En este caso $\sin \theta = (n_1/n_2) \sin \varphi > 1$, y como $\cos \theta = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \theta}$ sigue que:

$$\cos \theta = \pm j \sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2 \varphi - 1} = \pm j \alpha(\varphi)$$

Al poner $\beta(\varphi) = \sin \theta = \frac{n_1}{n_2} \sin \varphi$ y al quedarnos con el signo negativo de $\pm j \alpha(\varphi)$ (¿por qué?) se podrá escribir:

$$f^+(y, z) = e^{-\kappa_2 z \alpha(\varphi)} e^{-j \kappa_2 y \beta(\varphi)}$$

La onda f^+ representa una onda superficial.

Ejemplo

Una onda plana, que se propaga en un medio con un índice de refracción $n_1 = 6$, incide con un ángulo de $\pi/4$ sobre la superficie de separación con un segundo medio de índice de refracción $n_2 = 1$. Calcule al ángulo θ de refracción y determine $f^+(y, z)$.

Resp.: Ya que el ángulo de incidencia es mayor que el ángulo crítico $\varphi_c = \arcsin(n_2/n_1) = 9,59^\circ$, el ángulo de refracción será complejo y tendrá la forma $\theta = \pi/2 - j\beta$, y por tanto se tomará como ángulo físico de refracción el valor de $\pi/2$. Con relación al término $f^+(y, z)$ su forma será la siguiente:

$$\begin{aligned} f^+(y, z) &= e^{-\kappa_0 (36 \sin^2 \varphi - 1)^{1/2} z} e^{-j \kappa_0 (6 \sin \varphi) y} \\ &= e^{-(26/\lambda) z} e^{-j(\omega/c) 4,2 y} \end{aligned}$$

de donde se deduce que:

1. la onda refractada se propaga en la dirección de y a una velocidad 4,2 veces menor que la velocidad de la luz en el segundo medio $\nu_p = c/4,2$,
2. la onda refractada se atenúa muy rápidamente en el segundo medio, a razón de 26 neperios cada longitud de onda, en la dirección de z ,
3. la onda refractada se considera así una onda superficial evanescente ya que queda confinada a un pequeño espesor a partir de la superficie de separación de los dos medios, que acompaña al proceso resultante en el primer medio, que como se podrá demostrar más adelante, se propaga también en la dirección de y a la misma velocidad $\nu_p = c/4,2$.

Caso $n_1 < n_2$

Cuando $n_1 < n_2$, pero en particular $n_1 \ll n_2$ ocurre

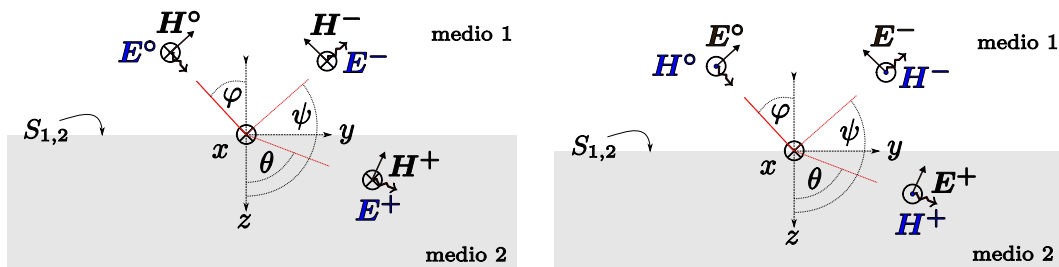
$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\sin \theta}{\sin \varphi} \ll 1 \Rightarrow \text{si } \frac{n_1}{n_2} \rightarrow 0 \Rightarrow \theta \rightarrow 0$$

y todas las ondas se refractan en dirección de la normal para todos los valores del ángulo de incidencia.

9.4. Fórmulas de FRESNEL

9.4.1. Introducción

Respecto al plano de incidencia el campo eléctrico puede presentar una orientación arbitraria. Sin embargo, cualquier campo eléctrico arbitrariamente orientado respecto al plano de incidencia se puede representar mediante una apropiada combinación lineal de las componentes perpendicular y paralela a dicho plano de incidencia –ver Fig. 9.11–.



(a) Onda incidente con polarización perpendicular: el campo eléctrico es ortogonal al plano de incidencia – entrando en la hoja–.

(b) Onda incidente con polarización paralela: el campo eléctrico está contenido en el plano de incidencia – contenido en la hoja–.

Figura 9.11: Polarizaciones bases de la onda plana incidente.

9.4.2. Polarización perpendicular

Cuando el campo eléctrico de la onda incidente es normal al plano de incidencia se dice que la misma presenta polarización perpendicular –ver Fig. 9.11(a)–. Respecto al sistema de referencia principal tenemos:

Onda incidente:

$$\mathbf{E}^o = A e^{-j\kappa_1(y \sin \varphi + z \cos \varphi)} \mathbf{a}_e^o$$

$$\mathbf{H}^o = \frac{A}{\eta_1} e^{-j\kappa_1(y \sin \varphi + z \cos \varphi)} \mathbf{a}_{h^o}$$

Onda reflejada:

$$\mathbf{E}^- = B e^{-j\kappa_1(y \sin \psi + z \cos \psi)} \mathbf{a}_{e^-}$$

$$\mathbf{H}^- = \frac{B}{\eta_1} e^{-j\kappa_1(y \sin \psi + z \cos \psi)} \mathbf{a}_{h^-}$$

Onda refractada:

$$\mathbf{E}^+ = C e^{-j\kappa_2(y \sin \theta + z \cos \theta)} \mathbf{a}_{e^+}$$

$$\mathbf{H}^+ = \frac{C}{\eta_2} e^{-j\kappa_2(y \sin \theta + z \cos \theta)} \mathbf{a}_{h^+}$$

con A , B y C complejos.

Los vectores $\mathbf{a}_{e^{o,-,+}}$ y $\mathbf{a}_{h^{o,-,+}}$ tienen la siguiente expresión en función de la base vectorial del sistema de referencia principal:

$$\mathbf{a}_{e^n} = \cos \alpha_1^n \mathbf{a}_x + \cos \alpha_2^n \mathbf{a}_y + \cos \alpha_3^n \mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{a}_{h^n} = \cos \beta_1^n \mathbf{a}_x + \cos \beta_2^n \mathbf{a}_y + \cos \beta_3^n \mathbf{a}_z$$

con $n \in \{o, -, +\}$. Los valores de estos ángulos directores se han deducido a partir de la Figura 9.11(a) y se muestran en el Cuadro 9.2.

Cuadro 9.2: Ángulos directores de los ejes $x^{o,-,+}$ y $y^{o,-,+}$ naturales respecto al sistema de referencia principal, en el caso de polarización perpendicular.

α_1^o	0°	α_1^-	0°	α_1^+	0°
α_2^o	90°	α_2^-	90°	α_2^+	90°
α_3^o	90°	α_3^-	90°	α_3^+	90°
β_1^o	90°	β_1^-	90°	β_1^+	90°
β_2^o	φ	β_2^-	$180^\circ - \varphi$	β_2^+	θ
β_3^o	$90^\circ + \varphi$	β_3^-	$270^\circ - \varphi$	β_3^+	$90^\circ + \theta$

Tomando en cuenta el valor de los ángulos del Cuadro 9.2 podemos escribir:

Onda incidente:

$$\mathbf{E}^o = A e^{-j\kappa_1(y \sin \varphi + z \cos \varphi)} \mathbf{a}_x$$

$$\mathbf{H}^o = \frac{A}{\eta_1} e^{-j\kappa_1(y \sin \varphi + z \cos \varphi)} (\cos \varphi \mathbf{a}_y - \sin \varphi \mathbf{a}_z)$$

Onda reflejada:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}^- &= B e^{-j\kappa_1(y \sin \psi + z \cos \psi)} \mathbf{a}_x \\ \mathbf{H}^- &= -\frac{B}{\eta_1} e^{-j\kappa_1(y \sin \psi + z \cos \psi)} (\cos \varphi \mathbf{a}_y + \sin \varphi \mathbf{a}_z)\end{aligned}$$

Onda refractada:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}^+ &= C e^{-j\kappa_2(y \sin \theta + z \cos \theta)} \mathbf{a}_x \\ \mathbf{H}^+ &= \frac{C}{\eta_2} e^{-j\kappa_2(y \sin \theta + z \cos \theta)} (\cos \theta \mathbf{a}_y - \sin \theta \mathbf{a}_z)\end{aligned}$$

Condiciones de borde

Las componentes tangenciales de los campos eléctrico y magnético han de ser continuas en la superficie de separación de los dos medios:

$$\begin{aligned}E^\circ(y, 0) + E^-(y, 0) &= E^+(y, 0) \\ H_y^\circ(y, 0) + H_y^-(y, 0) &= H_y^+(y, 0)\end{aligned}$$

De aquí sigue² que:

$$\begin{aligned}A + B &= C \\ \frac{1}{\eta_1}(A - B) \cos \varphi &= \frac{1}{\eta_2} C \cos \theta\end{aligned}$$

Al definir los coeficientes de reflexión, ρ_\perp , y transmisión, τ_\perp , para la polarización perpendicular :

$$\begin{aligned}\rho_\perp &= \frac{E^-(y, 0)}{E^\circ(y, 0)} = \frac{B}{A} \\ \tau_\perp &= \frac{E^+(y, 0)}{E^\circ(y, 0)} = \frac{C}{A}\end{aligned}$$

se podrá escribir:

$$\begin{aligned}1 + \rho_\perp &= \tau_\perp \\ \frac{1}{\eta_1}(1 - \rho_\perp) \cos \varphi &= \frac{1}{\eta_2} \tau_\perp \cos \theta\end{aligned}$$

²Tomando en cuenta las leyes de Snell: $\kappa_1 \sin \varphi = \kappa_1 \sin \psi = \kappa_2 \sin \theta$.

y de aquí se obtiene:

$$\rho_{\perp} = \frac{\eta_2 \cos \varphi - \eta_1 \cos \theta}{\eta_2 \cos \varphi + \eta_1 \cos \theta} \quad (9.64)$$

$$\tau_{\perp} = \frac{2\eta_2 \cos \varphi}{\eta_2 \cos \varphi + \eta_1 \cos \theta} \quad (9.65)$$

Tomando en cuenta que:

$$\sin \psi = \sin \varphi$$

$$\cos \psi = -\cos \varphi$$

Resulta, para $z < 0$:

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}^o + \mathbf{E}^- = A e^{-j\kappa_1 y \sin \varphi} (e^{-j\kappa_1 z \cos \varphi} + \rho_{\perp} e^{j\kappa_1 z \cos \varphi}) \mathbf{a}_x \quad (9.66)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_1 = \mathbf{H}^o + \mathbf{H}^- = \frac{A}{\eta_1} e^{-j\kappa_1 y \sin \varphi} \left\{ \left[e^{-j\kappa_1 z \cos \varphi} - \rho_{\perp} e^{j\kappa_1 z \cos \varphi} \right] \cos \varphi \mathbf{a}_y \right. \\ \left. - \left[e^{-j\kappa_1 z \cos \varphi} + \rho_{\perp} e^{j\kappa_1 z \cos \varphi} \right] \sin \varphi \mathbf{a}_z \right\} \end{aligned} \quad (9.67)$$

y para $z > 0$:

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}^+ = A \tau_{\perp} e^{-j\kappa_2 (y \sin \theta + z \cos \theta)} \mathbf{a}_x \quad (9.68)$$

$$\mathbf{H}_2 = \mathbf{H}^+ = \frac{A}{\eta_2} \tau_{\perp} e^{-j\kappa_2 (y \sin \theta + z \cos \theta)} (\cos \theta \mathbf{a}_y - \sin \theta \mathbf{a}_z) \quad (9.69)$$

Ejemplo

Una onda plana, que se propaga en un medio con un índice de refracción $n_1 = 6$, incide con un ángulo de $\pi/4$ sobre la superficie de separación con un segundo medio de índice de refracción $n_2 = 1$. El campo eléctrico incidente tiene una amplitud de $E = 5$ V/m y es perpendicular al plano de incidencia. Calcule:

1. El ángulo de refracción.
2. Los coeficientes de reflexión y transmisión.
3. \mathbf{S}^o , \mathbf{S}^- y \mathbf{S}^+ .

Solución

1. Ya que el ángulo de incidencia es mayor que el ángulo crítico $\varphi_C = \arcsin(n_2/n_1) = 9,59^\circ$, el ángulo de refracción será complejo y tendrá la forma $\theta = \pi/2 - j\beta$, y vale $\theta = \arcsin(n_2/n_1 \sin \pi/4) = \pi/2 - j2,124$, y por tanto se tomará cómo ángulo físico de refracción el valor de $\pi/2$.
2. El coeficiente de reflexión ρ_\perp (Ec. (9.64)), tomando en cuenta que $\eta_{1,2}$ son reales, y que $\cos \theta = -j[(n_1/n_2)^2 \sin^2 \varphi - 1]^{1/2}$, tendrá la siguiente apariencia $\rho_\perp = \frac{a+jb}{a-jb} = 1e^{j\phi_\perp}$, en particular, sustituyendo el valor $\cos \theta = -j[(n_1/n_2)^2 \sin^2 \varphi - 1]^{1/2}$ en las Ecs. (9.64) y (9.65) se tiene:

$$\begin{aligned}\rho_\perp &= 1e^{-j1,542} \\ \tau_\perp &= 1,434e^{-j0,771}\end{aligned}$$

3. Dado que $\mathbf{S} = \frac{1}{2}\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*$ y que $\mathbf{H} = \hat{z} \times \frac{\mathbf{E}}{\eta}$ será:

$$\begin{aligned}\mathbf{S}^\circ &= \frac{E^2}{2\eta_1} \hat{s}^\circ \\ \mathbf{S}^- &= \frac{|\rho_\perp|^2 E^2}{2\eta_1} \\ \mathbf{S}^+ &= \frac{|\tau_\perp|^2 E^2}{2\eta_2} f^+(y, z) f^+(y, z)^* \hat{s}^+\end{aligned}$$

donde $\hat{s}^{\circ,+,-}$ es el unitario en la dirección de propagación de la onda plana respectiva y $f^+(y, z) = e^{-(26/\lambda)z} e^{-j(\omega/c)4,2y}$, de modo que

$$\begin{aligned}\mathbf{S}^\circ &= \frac{25}{40\pi} \hat{s}^\circ \\ \mathbf{S}^- &= \frac{25}{40\pi} \hat{s}^- \\ \mathbf{S}^+ &= \frac{(1,43)^2 25}{240\pi} e^{-(52/\lambda)z} \hat{s}^+\end{aligned}$$

9.4.3. Polarización paralela

Cuando el campo eléctrico de la onda incidente yace sobre el plano de incidencia se dice que la misma presenta polarización paralela –ver Fig. 9.11(b)–. Por inspección de las Figs. 9.11(a) y 9.11(b) se puede concluir que \mathbf{E}_\parallel se orienta como el campo \mathbf{H}_\perp , y el campo \mathbf{H}_\parallel como el campo $-\mathbf{E}_\perp$, donde los sub-índices \parallel y \perp indican polarización paralela y perpendicular, respectivamente. Para este caso, los vectores $\mathbf{a}_{e^\circ,-,+}$ y $\mathbf{a}_{h^\circ,-,+}$ de los campos eléctrico y magnético, forman los ángulos directores

Cuadro 9.3: Ángulos directores de los ejes $x^{\circ,-,+}$ y $y^{\circ,-,+}$ naturales respecto al sistema de referencia principal, en el caso de polarización paralela deducidos a partir de la Fig. 9.11(b).

α_1°	90°	α_1^{-}	90°	α_1^{+}	90°
α_2°	φ	α_2^{-}	$180^{\circ} - \varphi$	α_2^{+}	θ
α_3°	$90^{\circ} + \varphi$	α_3^{-}	$270^{\circ} - \varphi$	α_3^{+}	$90^{\circ} + \theta$
β_1°	180°	β_1^{-}	180°	β_1^{+}	180°
β_2°	90°	β_2^{-}	90°	β_2^{+}	90°
β_3°	90°	β_3^{-}	90°	β_3^{+}	90°

$\alpha_{1,2,3}^{\circ,-,+}$ y $\beta_{1,2,3}^{\circ,-,+}$, respectivamente, con los ejes x , y y z del sistema de referencia principal que se indican en el Cuadro 9.3.

Tomando en cuenta el valor de estos ángulos según el Cuadro 9.3 podemos escribir:

Onda incidente:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{\circ} &= Ae^{-j\kappa_1(y \sin \varphi + z \cos \varphi)} (\cos \varphi \mathbf{a}_y - \sin \varphi \mathbf{a}_z) \\ \mathbf{H}^{\circ} &= -\frac{A}{\eta_1} e^{-j\kappa_1(y \sin \varphi + z \cos \varphi)} \mathbf{a}_x \end{aligned}$$

Onda reflejada:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{-} &= -Be^{-j\kappa_1(y \sin \psi + z \cos \psi)} (\cos \psi \mathbf{a}_y + \sin \psi \mathbf{a}_z) \\ \mathbf{H}^{-} &= -\frac{B}{\eta_1} e^{-j\kappa_1(y \sin \psi + z \cos \psi)} \mathbf{a}_x \end{aligned}$$

Onda refractada:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{+} &= Ce^{-j\kappa_2(y \sin \theta + z \cos \theta)} (\cos \theta \mathbf{a}_y - \sin \theta \mathbf{a}_z) \\ \mathbf{H}^{+} &= -\frac{C}{\eta_2} e^{-j\kappa_2(y \sin \theta + z \cos \theta)} \mathbf{a}_x \end{aligned}$$

Condiciones de borde

Las componentes tangenciales de los campos eléctrico y magnético han de ser continuas en la superficie de separación de los dos medios:

$$\begin{aligned} E_y^{\circ}(y, 0) + E_y^{-}(y, 0) &= E_y^{+}(y, 0) \\ H^{\circ}(y, 0) + H^{-}(y, 0) &= H^{+}(y, 0) \end{aligned}$$

De aquí sigue³ que:

$$(A - B) \cos \varphi = C \cos \theta$$

$$\frac{1}{\eta_1}(A + B) = \frac{C}{\eta_2}$$

Al definir los coeficientes de reflexión, ρ_{\parallel} , y transmisión, τ_{\parallel} , para la polarización paralela:

$$\rho_{\parallel} = \frac{E^-(y, 0)}{E^{\circ}(y, 0)} = -\frac{B}{A}$$

$$\tau_{\parallel} = \frac{E^+(y, 0)}{E^{\circ}(y, 0)} = \frac{C}{A}$$

se podrá escribir:

$$(1 + \rho_{\parallel}) \cos \varphi = \tau_{\parallel} \cos \theta$$

$$\frac{1}{\eta_1}(1 - \rho_{\parallel}) = \frac{1}{\eta_2}\tau_{\parallel}$$

y de aquí se obtiene:

$$\rho_{\parallel} = \frac{\eta_2 \cos \theta - \eta_1 \cos \varphi}{\eta_2 \cos \theta + \eta_1 \cos \varphi} \quad (9.70)$$

$$\tau_{\parallel} = \frac{2\eta_2 \cos \varphi}{\eta_2 \cos \theta + \eta_1 \cos \varphi} \quad (9.71)$$

Cuadro 9.4: Fórmulas de FRESNEL.

$\rho_{\perp} = \frac{\eta_2 \cos \varphi - \eta_1 \cos \theta}{\eta_2 \cos \varphi + \eta_1 \cos \theta}$	$\tau_{\perp} = \frac{2\eta_2 \cos \varphi}{\eta_2 \cos \varphi + \eta_1 \cos \theta}$
$\rho_{\parallel} = \frac{\eta_2 \cos \theta - \eta_1 \cos \varphi}{\eta_2 \cos \theta + \eta_1 \cos \varphi}$	$\tau_{\parallel} = \frac{2\eta_2 \cos \varphi}{\eta_2 \cos \theta + \eta_1 \cos \varphi}$

Las ecuaciones 9.64, 9.65, 9.70 y 9.71 se conocen como **fórmulas de FRESNEL** y se resumen en el cuadro 9.4. Tomando en cuenta que:

$$\sin \psi = \sin \varphi$$

$$\cos \psi = -\cos \varphi$$

Resulta, para $z < 0$:

³Tomando en cuenta las leyes de SNELL: $\kappa_1 \sin \varphi = \kappa_1 \sin \psi = \kappa_2 \sin \theta$.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 = \mathbf{E}^o + \mathbf{E}^- &= A e^{-j\kappa_1 y \sin \varphi} \left\{ \left[e^{-j\kappa_1 z \cos \varphi} + \rho_{\parallel} e^{j\kappa_1 z \cos \varphi} \right] \cos \varphi \mathbf{a}_y \right. \\ &\quad \left. - \left[e^{-j\kappa_1 z \cos \varphi} - \rho_{\parallel} e^{j\kappa_1 z \cos \varphi} \right] \sin \varphi \mathbf{a}_z \right\} \end{aligned} \quad (9.72)$$

$$\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}^o + \mathbf{H}^- = -\frac{A}{\eta_1} e^{-j\kappa_1 y \sin \varphi} (e^{-j\kappa_1 z \cos \varphi} - \rho_{\parallel} e^{j\kappa_1 z \cos \varphi}) \mathbf{a}_x \quad (9.73)$$

y para $z > 0$:

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}^+ = A \tau_{\parallel} e^{-j\kappa_2 (y \sin \theta + z \cos \theta)} (\cos \theta \mathbf{a}_y - \sin \theta \mathbf{a}_z) \quad (9.74)$$

$$\mathbf{H}_2 = \mathbf{H}^+ = -\frac{A}{\eta_2} \tau_{\parallel} e^{-j\kappa_2 (y \sin \theta + z \cos \theta)} \mathbf{a}_x \quad (9.75)$$

9.4.4. Ángulo de BREWSTER

Para el caso de la polarización paralela existe un ángulo de incidencia φ_B , denominado Ángulo de BREWSTER, para el cual el coeficiente de reflexión paralela se anula $\rho_{\parallel} = 0$. Esto ocurre, en efecto, si $\eta_2 \cos \theta = \eta_1 \cos \varphi_B$. Si consideramos dos medios no absorbentes y no magnéticos, la expresión anterior se puede escribir de forma equivalente como $n_1 \cos \theta = n_2 \cos \varphi_B$, siendo, como sabemos, n_1 y n_2 los índices de refracción de los medios 1 y 2, respectivamente. Tomando en cuenta la segunda Ley de SNELL, $\frac{n_1}{n_2} = \frac{\sin \theta}{\sin \varphi_B}$, se ha de cumplir entonces que $\sin \theta \cos \theta = \sin \varphi_B \cos \varphi_B$, lo cual, en efecto, ocurre si $\theta = \frac{\pi}{2} - \varphi_B$. El ángulo de BREWSTER se puede estimar tomando en cuenta que:

$$n_1 \cos \theta = n_2 \sin \varphi_B$$

según la Ec. de FRESNEL (9.70) poniendo $\rho_{\parallel} = 0$, y

$$n_1 \sin \varphi_B = n_2 \sin \theta$$

según la 2da. Ley de SNELL (Ec. (9.63)), considerando que

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 = \sin^2 \varphi_B + \cos^2 \varphi_B$$

despejando $\sin^2 \theta$ y $\cos^2 \theta$ de las expresiones previas

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta &= \frac{n_1^2}{n_2^2} \sin^2 \varphi_B \\ \cos^2 \theta &= \frac{n_2^2}{n_1^2} \cos^2 \varphi_B \end{aligned}$$

sigue que

$$\frac{n_1^2}{n_2^2} \sin^2 \varphi_B + \frac{n_2^2}{n_1^2} \cos^2 \varphi_B = \sin^2 \varphi_B + \cos^2 \varphi_B$$

de donde

$$\varphi_B = \tan^{-1} \left(\frac{n_2}{n_1} \right)$$

9.4.5. Reflexión total

Sean el medio 1 no absorbente: η_1 es real, y el medio 2 un conductor perfecto: $\sigma_2 \rightarrow \infty \Rightarrow \eta_2 \rightarrow 0$ Sigue entonces que:

$$\begin{aligned} \rho_{\perp} &= -1 & \tau_{\perp} &= 0 \\ \rho_{\parallel} &= -1 & \tau_{\parallel} &= 0 \end{aligned}$$

Polarización perpendicular

Los campos en el medio 2 son nulos. En el medio 1 los campos tienen la forma siguiente (ver Fig. 9.12):

$$\mathbf{E} = -j2A \sin(\kappa_T z) e^{-j\kappa_{\ell} y} \mathbf{a}_x \quad (9.76)$$

$$\mathbf{H} = \frac{2A}{\eta_1} \left[\cos(\kappa_T z) e^{-j\kappa_{\ell} y} \cos \varphi \mathbf{a}_y + j \sin(\kappa_T z) e^{-j\kappa_{\ell} y} \sin \varphi \mathbf{a}_z \right] \quad (9.77)$$

donde $\kappa_T = \kappa_1 \cos \varphi$ y $\kappa_{\ell} = \kappa_1 \sin \varphi$ se denominan números de onda transversal y longitudinal, respectivamente.

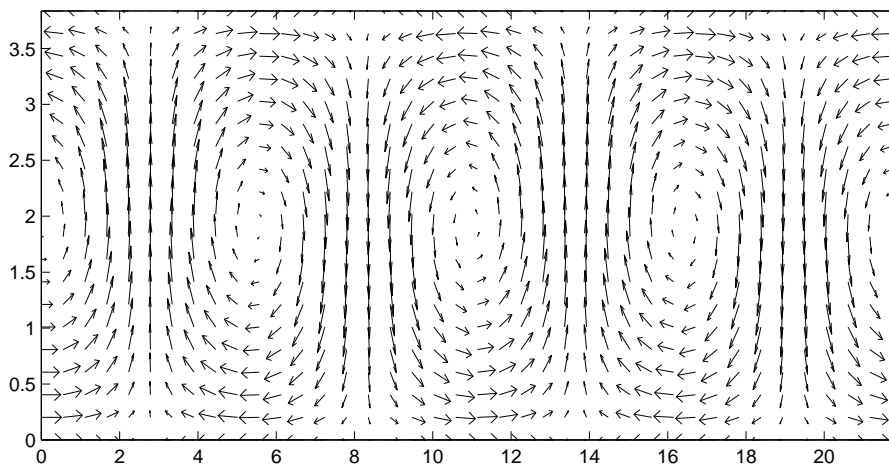


Figura 9.12: Estructura del campo magnético en el plano zy .

En el dominio temporal:

$$\mathcal{E}(y, z, t) = 2A \sin(\kappa_T z) \sin(\omega t - \kappa_\ell y) \mathbf{a}_x \quad (9.78)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(y, z, t) = \frac{2A}{\eta_1} & [\cos(\kappa_T z) \cos(\omega t - \kappa_\ell y) \cos \varphi \mathbf{a}_y \\ & - \sin(\kappa_T z) \sin(\omega t - \kappa_\ell y) \sin \varphi \mathbf{a}_z] \end{aligned} \quad (9.79)$$

Así como definimos κ_T y κ_ℓ , es admisible definir $\Lambda_T = \frac{2\pi}{\kappa_T}$ y $\Lambda_\ell = \frac{2\pi}{\kappa_\ell}$:

$$\mathcal{E}(y, z, t) = E_x \sin\left(\frac{2\pi}{\Lambda_T} z\right) \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{\Lambda_\ell} y\right) \mathbf{a}_x \quad (9.80)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(y, z, t) = H_y \cos\left(\frac{2\pi}{\Lambda_T} z\right) \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\Lambda_\ell} y\right) \mathbf{a}_y \\ - H_z \sin\left(\frac{2\pi}{\Lambda_T} z\right) \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{\Lambda_\ell} y\right) \mathbf{a}_z \end{aligned} \quad (9.81)$$

A partir de las Ecs. (9.80) y (9.81) se observa que en la dirección normal a la superficie $S_{1,2}$ de separación de los medios se crea un patrón de amplitudes con leyes de variación respecto a la variable z del tipo $\sin \frac{2\pi}{\Lambda_T} z$, para las componentes \mathcal{E}_x y \mathcal{H}_y , y del tipo $\cos \frac{2\pi}{\Lambda_T} z$ para la componente \mathcal{H}_z . En virtud de las definiciones de $\kappa_{T,\ell}$ y $\Lambda_{T,\ell}$ se infiere, además, que al aumentar el ángulo de incidencia $\varphi \uparrow$, el número de onda transversal disminuye $\kappa_T \downarrow$ y por consiguiente la separación de los nulos en el plano transversal aumenta $\Lambda_T \uparrow$.

Animación del campo magnético utilizando MATLAB

Una animación que muestra la dinámica del campo magnético sobre el plano conductor se puede realizar usando MATLAB. En la página web del curso [TeMii2.html](#) se muestra esta animación de la cual en la Figura 9.12 se muestra un fotograma. Para todo ángulo φ de incidencia tal que $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, a partir de las Ecuaciones (9.78) y (9.79), comprendemos que el «proceso» que resulta, se propaga tangente al plano de separación de los medios, en la dirección de y , con un patrón de amplitudes que presenta máximos y nulos en el plano transversal. Este «proceso» consiste en una onda plana no uniforme progresiva en la dirección de crecimiento de las y . Vemos como el plano conductor hace de guía, guiando la onda en una de sus direcciones tangenciales. A continuación se anexa una copia del script que permite crear la mencionada animación del campo magnético durante dos períodos. La ventana creada mide $\lambda_T/2$ de alto (eje z) y $2\lambda_\ell$ de ancho (eje y).

```
% incoA
```

```

phi=35*pi/180;
kl=sin(phi);
kt=cos(phi);
lambdat=2*pi/kt;
lambdal=2*pi/kl;
z=linspace(0,lambdat/2,20);
y=linspace(0,3*lambdal,60);
x=y; y=z;
[X,Y]=meshgrid(x,y);
for t=0:40
hy=cos(phi)*cos(kt*Y).*cos(2*pi*t/20-kl*X);
hz=-sin(phi)*sin(kt*Y).*sin(2*pi*t/20-kl*X);
quiver(X,Y,hy,hz);
axis([0 2*lambdal 0 lambdat/2])
set(gca,'PlotBoxAspectRatio',[2,11])
image=getframe;
M(t+1)=image;
P=frame2im(image);
directory = 'images/';
number = num2str(t);
extension = '.bmp';
filename=[directory,number,extension];
imwrite(P,eval('filename'),'bmp');
end

```

Ahora bien, si se introduce un segundo cuerpo conductor en el escenario previo (ver figura futura) con una superficie exterior plana, ubicado a una distancia D igual a un número entero de medias Λ_T : $D = n\frac{\Lambda_T}{2}$, con $n = 1, 2, 3 \dots$, los patrones de amplitudes dados por las ecuaciones (9.80) y (9.81), no se verían alterados, ya que los mismos satisfacen de antemano las condiciones de borde que el nuevo cuerpo conductor impondría.

Cabe preguntarse, luego, dado el sistema de conductores de la Fig. futura, cuáles ángulos de incidencia, sobre uno cualquiera de los planos conductores (polarización perpendicular), dan lugar a un patrón de amplitudes de \mathcal{E} y \mathcal{H} que satisfagan las condiciones de borde que imponen ambos conductores. La respuesta se obtiene al

imponer:

$$\begin{aligned}\kappa_T D &= n\pi \\ \kappa_1 \cos \varphi &= \frac{n\pi}{D} \\ \cos \varphi &= \frac{nc}{2Df}\end{aligned}\tag{9.82}$$

$$\text{con } n = 1, 2, \dots, N$$

siendo N el número entero mayor para el cual se obtiene un ángulo de incidencia físicamente realizable.

Problema

Para un par de planos conductores separados una distancia $D = 2$ cm y a $f = 40$ GHz, calcule los ángulos de incidencia físicamente realizables que permitan la propagación de los campos en la forma descrita previamente.

Resp.: 79.1931° , 67.9757° , 55.7711° , 41.4096° y 20.3641° , en correspondencia de $n = 1, 2, 3, 4, 5$, siendo $N = 5$.

Polarización paralela

Los campos en el medio 2 son nulos. En el medio 1 los campos tienen la forma siguiente (ver figura 9.13):

$$\mathbf{E} = -2A \left[j \sin(\kappa_T z) e^{-j\kappa_\ell y} \cos \varphi \mathbf{a}_y + \cos(\kappa_T z) e^{-j\kappa_\ell y} \sin \varphi \mathbf{a}_z \right]\tag{9.83}$$

$$\mathbf{H} = -\frac{2jA}{\eta_1} \cos(\kappa_T z) e^{-j\kappa_\ell y} \mathbf{a}_x\tag{9.84}$$

En el dominio temporal:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(y, z, t) &= 2A \left[\sin(\kappa_T z) \sin(\omega t - \kappa_\ell y) \cos \varphi \mathbf{a}_y \right. \\ &\quad \left. - \cos(\kappa_T z) \cos(\omega t - \kappa_\ell y) \sin \varphi \mathbf{a}_z \right]\end{aligned}\tag{9.85}$$

$$\mathcal{H}(y, z, t) = \frac{2A}{\eta_1} \cos(\kappa_T z) \sin(\omega t - \kappa_\ell y) \mathbf{a}_x\tag{9.86}$$

Animación del campo eléctrico utilizando MATLAB

A continuación se anexa una copia del script que permite crear una animación del campo eléctrico durante dos períodos. La ventana creada mide $\lambda_T/2$ de alto (eje z) y $2\lambda_\ell$ de ancho (eje y):

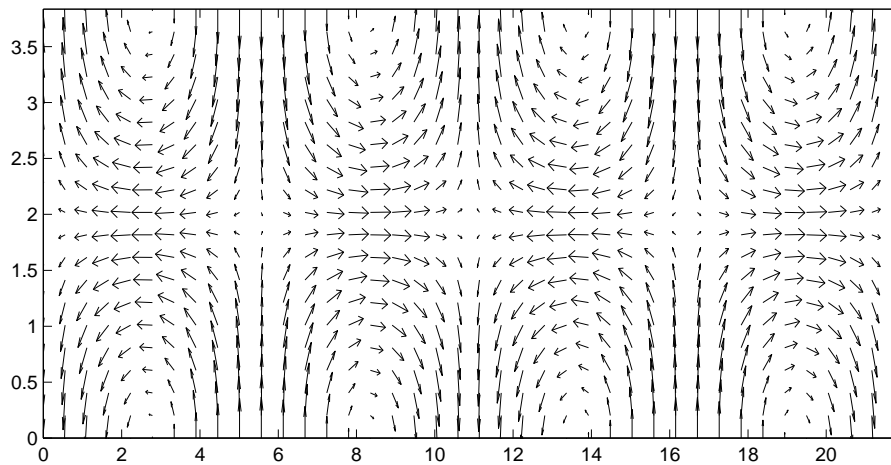


Figura 9.13: Estructura del campo eléctrico en el plano zy .

```

% incoB
phi=35*pi/180;
kl=sin(phi);
kt=cos(phi);
lambdat=2*pi/kt;
lambdal=2*pi/kl;
z=linspace(0,lambdat/2,20);
y=linspace(0,3*lambdal,60);
x=y; y=z;
[X,Y]=meshgrid(x,y);
for t=0:40
ey=cos(phi)*sin(kt*Y).*sin(2*pi*t/20-kl*X);
ez=-sin(phi)*cos(kt*Y).*cos(2*pi*t/20-kl*X);
quiver(X,Y,ey,ez);
axis([0 2*lambdal 0 lambdat/2])
set(gca,'PlotBoxAspectRatio',[2,1
1])
image=getframe; M(t+1)=image;
P=frame2im(image);
directory = 'images/';
number = num2str(t);
extension = '.bmp';
filename=[directory,number,extension];
imwrite(P,eval('filename'),'bmp');
end

```

Condiciones límites de LEONTÓVICH

Analicemos la onda refractada en un buen conductor (ver Cuadro 9.5):

$$f^+(y, z) = e^{-j\kappa(y \sin \theta + z \cos \theta)} \quad (9.87)$$

donde $\kappa = \sqrt{\frac{\omega\sigma\mu}{2}}(1 - j)$ es complejo.

Tomando en cuenta la segunda ley de SNELL para la interfaz espacio vacío-buen conductor $\kappa_0 \sin \varphi = \kappa \sin \theta$, siendo $\kappa_0 \sin \varphi$ real, sigue que $\sin \theta$ ha de ser complejo de modo que:

$$\underbrace{\kappa_0 \sin \varphi}_{\text{real}} = \underbrace{\underbrace{\kappa}_{\text{complejo}} \underbrace{\sin \theta}_{\text{complejo}}}_{\text{real}} \quad (9.88)$$

De esta forma la Ec. (9.87) se podrá escribir de la forma:

$$\begin{aligned} f^+(y, z) &= e^{-j\kappa(y \sin \theta + z \cos \theta)} \\ &= e^{-j \left(y \kappa_0 \sin \varphi + z \sqrt{\kappa^2 - \kappa_0^2 \sin^2 \varphi} \right)} \\ &= e^{-B_z z} e^{-j(A_y y + A_z z)} \end{aligned} \quad (9.89)$$

donde $A_y = \kappa_0 \sin \varphi$, $A_z = \Re \left\{ \sqrt{\kappa^2 - \kappa_0^2 \sin^2 \varphi} \right\}$ y $B_z = \Im \left\{ \sqrt{\kappa^2 - \kappa_0^2 \sin^2 \varphi} \right\}$.

Cuadro 9.5: Conductividad de algunos buenos conductores.

Conductor	Conductividad [S/m]
Plata	6.1×10^7
Cobre	5.7×10^7
Oro	4.1×10^7
Aluminio	3.5×10^7

De la Ecuación (9.89) observamos que la onda refractada se propaga en el conductor formando cierto ángulo γ con la normal a la superficie de separación $\gamma = \tan^{-1} \frac{A_y}{A_z}$, y se amortigua de acuerdo al factor $e^{-B_z z}$. En sentido riguroso, la onda refractada en un buen conductor ya no es una onda plana uniforme,

sino una onda plana no homogénea. Sin embargo, para un buen conductor, en general, se cumple que $\kappa^2 \gg \kappa_0^2 \sin^2 \varphi$ ($A_y \ll A_z$) para cualquier valor de φ , de modo que:

$$\sqrt{\kappa^2 - \kappa_0^2 \sin^2 \varphi} \approx \pm \kappa \quad (9.90)$$

que por razones físicas se toma (?):

$$\sqrt{\kappa^2 - \kappa_0^2 \sin^2 \varphi} \approx \kappa \quad (9.91)$$

De esta forma vemos como la tangente del ángulo γ vale, para cualquier ángulo de incidencia φ : $\tan \gamma = \frac{A_y}{A_z} \approx 0$, y por tanto $\gamma \approx 0^\circ$. Todo lo cual nos permite concluir que, en la práctica, la onda refractada en el buen conductor lo hace siguiendo la normal a la superficie, y que las componentes tangenciales de los campos resultantes en el medio 1 se convierten en las amplitudes complejas de los campos refractados en el conductor no perfecto para cualquier ángulo de incidencia:

$$\mathbf{E} = E^+(0)e^{-j\kappa_C z} \mathbf{a}_t \quad (9.92)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{a}_z \times \frac{\mathbf{E}}{\eta_C} \quad (9.93)$$

donde κ_C y η_C son el número de onda y la impedancia intrínseca del conductor, respectivamente, \mathbf{a}_t es cierto vector tangencial a la superficie de separación de los medios y $E^+(0) = E_t^o(0) + E_t^-(0)$. Estas –Ecuaciones (9.92) y (9.93)– son la condiciones límites de LEONTÓVICH.

Problema

Una onda plana incide desde un medio dieléctrico sin pérdidas caracterizado por $\varepsilon = \varepsilon_0$ y $\mu = \mu_0$, sobre la superficie plana de separación de un buen conductor ($\sigma = 6,1 \times 10^7$ [S/m] –plata–). Para cada uno de los ángulos de incidencia de 20° y 80° , y para una frecuencia $f = 0,88$ GHz, calcular:

1. τ_{\parallel} y τ_{\perp} .
2. ρ_{\parallel} y ρ_{\perp} .
3. El ángulo de refracción.
4. Si la intensidad del campo eléctrico en la superficie vale 0,5 V/m, escriba la expresión de los campos eléctrico y magnético, y de la densidad de corriente \mathbf{J} en el conductor.

Resp.: de acuerdo a la segunda ley de Snell

$$\theta = \arcsin \left(\sin \varphi \frac{\kappa_1}{\kappa_2} \right)$$

y tomando en cuenta que $\kappa_1 = \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$ y $\kappa_2 = \sqrt{\frac{\omega \mu_0 \sigma}{2}}(1 - j)$ resulta

φ	θ
20°	$3,926 \times 10^{-4}(1 + j)^\circ$
80°	$1,13 \times 10^{-3}(1 + j)^\circ$

Usando las fórmulas de FRESNEL resumidas en el Cuadro 9.4, se obtienen:

1. los coeficientes de transmisión:

φ	τ_{\parallel}	τ_{\perp}
20°	$4,006 \times 10^{-5}(1 + j)$	$3,765 \times 10^{-5}(1 + j)$
80°	$(4,006 + j4,005) \times 10^{-5}$	$6,957 \times 10^{-6}(1 + j)$

2. los coeficientes de reflexión:

φ	ρ_{\parallel}	ρ_{\perp}
20°	$-1 + j4,263 \times 10^{-5}$	$-1 + j3,765 \times 10^{-5}$
80°	$-1 + j2,307 \times 10^{-4}$	$-1 + j6,957 \times 10^{-6}$

3. El campo en el medio conductor se puede representar en la siguiente forma híbrida:

$$\mathbf{E}^+ = E_0 e^{-j\kappa_2(y \sin \theta + z \cos \theta)} \mathbf{a}_e^+$$

como κ_2 es complejo, pero $\kappa_1 \sin \varphi$ es real, sigue que $\sin \theta$ ha de ser complejo de modo que el producto $\kappa_2 \sin \theta$ sea también real. Con todo, $\kappa_2 \cos \theta = \kappa_2 \sqrt{1 - \sin^2 \theta}$ será complejo. De esta forma el campo \mathbf{E} se podrá escribir como

$$\mathbf{E}^+ = E_0 e^{-B_z z} e^{-j(A_y y + A_z z)} \mathbf{a}_e^+$$

donde $A_y = \kappa_2 \sin \theta$, $A_z = \Re(\kappa_2 \cos \theta)$ y $B_z = \Im(\kappa_2 \cos \theta)$. El ángulo de refracción de la onda en el medio conductor, el cual denominaremos θ^* , es igual al ángulo que forma el vector de onda $A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z$ con la normal a la superficie \mathbf{a}_z :

$$\theta^* = \arctan \left(\frac{A_y}{A_z} \right)$$

φ	θ^*
20°	$\approx 0[^\circ]$
80°	$\approx 0[^\circ]$

Comentarios: la onda refractada en un buen conductor lo hace *acostándose* a la normal a la superficie para cualquier ángulo de incidencia. Prácticamente la onda se refracta en la dirección de la normal a la superficie para todo ángulo φ de incidencia.

4. En el conductor:

$$\mathbf{E}^+ = 0,5e^{-B_z z} e^{-j(A_y y + A_z z)} \mathbf{a}_e^+$$

$$\mathbf{H}^+ = \mathbf{a}_z \times \frac{\mathbf{E}^+}{\eta_2}$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}^+$$

y por tanto:

a) Para $\varphi = 20^\circ$:

$$\mathbf{E}^+ = 0,5e^{-460300z} e^{-j(6,308y + 460300z)} \mathbf{a}_e^+ \text{ [V/m]}$$

$$\mathbf{H}^+ = 33,127(1 + j)e^{-460300z} e^{-j(6,308y + 460300z)} \mathbf{a}_h^+ \text{ [A/m]}$$

$$\mathbf{J} = 3,05 \times 10^7 e^{-460300z} e^{-j(6,308y + 460300z)} \mathbf{a}_e^+ \text{ [A/m}^2\text{]}$$

b) Para $\varphi = 80^\circ$:

$$\mathbf{E}^+ = 0,5e^{-460300z} e^{-j(18,163y + 460300z)} \mathbf{a}_e^+ \text{ [V/m]}$$

$$\mathbf{H}^+ = 33,127(1 + j)e^{-460300z} e^{-j(18,163y + 460300z)} \mathbf{a}_h^+ \text{ [A/m]}$$

$$\mathbf{J} = 3,05 \times 10^7 e^{-460300z} e^{-j(18,163y + 460300z)} \mathbf{a}_e^+ \text{ [A/m}^2\text{]}$$

9.5. Mini-proyectos

Mini-proyecto 1

Usando la base de datos disponible en <http://www.fcc.gov/oet/rfsafety/dielectric.html> seleccione tres materiales de propiedades electromagnéticas *muy* distintas. Seleccione, además, un rango de frecuencias *suficientemente grande* para los fines de las tareas que se proponen a continuación y proceda, usando MATLAB⁴, a

⁴El uso de MATLAB no es restrictivo. Puede usar cualquier otro software matemático.

1. Construir las gráficas $\kappa' = \kappa'(f)$ [rad/m] y $\kappa'' = \kappa''(f)$ [Np/m], usando, si es necesario, escalas a la izquierda y a la derecha. La gráfica de $\kappa'' = \kappa''(f)$ repítala en [dB/m] y la de $\kappa' = \kappa'(f)$ en [°/m].
2. Repita los cálculos del punto anterior usando las fórmulas aproximadas considerando cada material una vez como un dieléctrico de bajas pérdidas ($\kappa' \approx \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon'}$ y $\kappa'' \approx \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon'}\frac{\varepsilon''}{2\varepsilon'}$), y otra vez como un buen conductor ($\kappa' = \kappa'' \approx \sqrt{\frac{\omega\mu_0\sigma}{2}}$). Superponga los resultados con los del punto anterior sobre una misma gráfica (una por material) utilizando distintos tipos de líneas y marcas. Analice el resultado y concluya acerca del rango de frecuencia en el que las aproximaciones se pueden tomar como válidas.
3. Construir las gráficas $\nu_p = \nu_p(f)$ y $\nu_{gr} = \nu_{gr}(f)$, usando, si es necesario, escalas a la izquierda y a la derecha.
4. Construir las gráficas $\Delta = \Delta(f)$ y $\tan \Delta = \tan \Delta(f)$, usando, si es necesario, escalas a la izquierda y a la derecha.
5. Construir la gráfica $\delta = \delta(f)$.

Mini-proyecto 2

Introducción

Se propone a continuación una terna de problemas para ser resueltos usando MATLAB o Mathcad, u otro software similar, con el propósito de estudiar la dispersión en los medios cuyas propiedades intrínsecas son dependientes de la frecuencia.

Un medio dispersivo se modelará con una función de transferencia $H(\omega) = e^{-j\kappa(\omega)\Delta z}$, donde $\kappa(\omega)$ es el número de onda dependiente de la frecuencia, y Δz es la longitud recorrida por la onda a través del medio. De esta suerte, si $E_i(\omega)$ es la transformada de Fourier de cierto campo $\mathcal{E}_i(t)$ variable en el tiempo: $E_i(\omega) = \mathfrak{F}\{\mathcal{E}_i(t)\}$, donde el subíndice i está por «entrada», después de Δz metros recorridos por la onda en el medio, tendremos un campo eléctrico de «salida» $\mathcal{E}_o(t)$ dado por:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_o(t) &= \mathfrak{F}^{-1}\{E_i(\omega)H(\omega)\} \\ &= \mathfrak{F}^{-1}\{E_i(\omega)e^{-j\kappa(\omega)\Delta z}\}\end{aligned}$$

En MATLAB, la transformada de FOURIER, $\mathfrak{F}\{ \}$, y su inversa, $\mathfrak{F}^{-1}\{ \}$, se estiman discretamente mediante las funciones `FFT[]` e `IFFT[]`, respectivamente.

Se trata, en los ejercicios que se proponen en este documento, de experimentar con cierto medio no magnético, de propiedades intrínsecas dispersivas $\varepsilon'(\omega)$ y $\varepsilon''(\omega)$, para estimar el efecto que estas propiedades dependientes de la frecuencia tienen sobre ciertos campos de entrada con formas temporales dadas. Para ello se deberá proceder de la siguiente manera:

- tomar N muestras de la forma temporal del campo $\mathcal{E}_i(t)$ y almacenarlas en un vector de MATLAB,
- tomar la FFT de esta secuencia,
- multiplicar el vector resultante por un vector formado por igual número de muestras (N) de la función de transferencia $H(\omega)$ del medio, y
- tomar, finalmente, la IFFT del vector resultante. El vector resultante contendrá N muestras de la forma temporal de $\mathcal{E}_o(t)$.

En adelante denominaremos este procedimiento «procedimiento numérico».

1. Usando la base de datos disponible en <http://www.fcc.gov/oet/rfsafety/dielectric.html> seleccione un medio. Seleccione, además, un rango de frecuencias *suficientemente grande* para los fines de las tareas que se proponen a continuación y proceda, usando MATLAB⁵, a construir las gráficas $\varepsilon = \varepsilon'(\omega)$ y $\varepsilon'' = \varepsilon''(\omega)$, usando, si es necesario, escalas a la izquierda y a la derecha.
2. Para el medio dispersivo no magnético seleccionado, calcule la profundidad de penetración δ para un valor de frecuencia ω_1 prefijado por usted. Para este valor de frecuencia conciba un campo mono-cromático de entrada $-\mathcal{E}_i(t)$, y usando el procedimiento numérico, con $H(\omega_1) = e^{-j\kappa(\omega_1)\delta}$, compruebe que $|\mathcal{E}_o(t)| = \frac{|\mathcal{E}_i(t)|}{e}$.
3. Usando las formas temporales del campo $\mathcal{E}_i(t)$ que se muestran en la Fig. 9.14 estime, usando el procedimiento numérico, las correspondientes formas temporales de salida $\mathcal{E}_o(t)$, calibrando apropiadamente los valores de ω_0 , ancho de banda (BW) y Δz , de manera tal de observar el efecto de la dispersión en el campo de salida.

⁵El uso de MATLAB no es restrictivo. Puede usar cualquier otro software matemático.

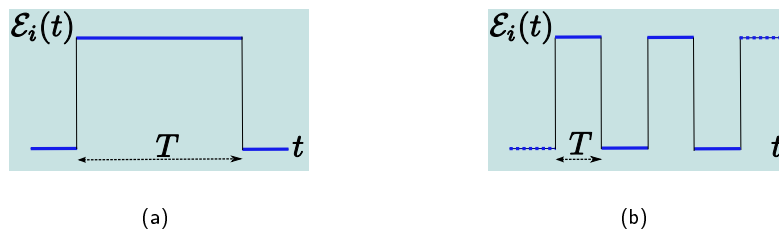


Figura 9.14: Formas temporales de entrada $\mathcal{E}_i(t)$.

9.6. El código FDTD en MATLAB[®]

```
function ftdtd1d(epsir2,sigma2)
% FDTD1D resuelve la propagación de una onda plana en dos medios contiguos

% separados por un plano sobre el cual la onda incide perpendicularmente.
% % % % % % % % valores recomendados % % % % % % % %
% caso 1: epsi2r=1, sigma2=0 adaptación
% caso 2: epsi2r=4, sigma2=0 desadaptación intermedia, reflexión parcial
% caso 3: epsi2r=4, sigma2=0.04 desadaptación intermedia con absorción
% caso 4: epsi2r=4, sigma2=100 reflexión total
close all
K=200;
kc=K/2;
t0=40;
spread=12;
n=0;
N=600;
ex(K)=0; hy(K)=0;
z=1:K;
exi1=0; exi2=0; exd1=0; exd2=0;
epsi0=8.85419e-12; c=3e8;
xd=100;
epsir=epsir2;
sigma=sigma2;
f=700e6;
lambdamin=c/(sqrt(epsir)*f);
deltaz=lambdamin/10;
deltat=deltaz/(2*c);
eaf=(deltat*sigma)/(2*epsir*epsi0);
```

```

sigmaz=[ones(1,xd-1) ones(1,K-xd+1)*((1-eaf)/(1+eaf))];
epsiz=[0.5*ones(1,xd-1) 0.5*ones(1,K-xd+1)./(epsir*(1+eaf))];
y=[-2 2]; zd=[xd xd];
deltaz=lambdamin/10;
deltat=deltaz/(2*c);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Pasos de tiempo%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
for n=1:N
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% calculo del campo eléctrico%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
for k=2:K
ex(k)=sigmaz(k)*ex(k)+epsiz(k)*(hy(k-1)-hy(k));
end
pulso=sin(2*pi*f*deltat*n);
(5)=ex(5)+pulso;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% ABC%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
ex(1)=exi2; exi2=exi1; exi1=ex(2); ex(K)=exd2; exd2=exd1; exd1=ex(K-1);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% calculo del campo magnético%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
for k=1:K-1
hy(k)=hy(k)+0.5*(ex(k)-ex(k+1));
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% visualización%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
subplot(2,1,1)
plot(z,ex,'b',zd,y,'g')
ylabel('E_x')
axis([5 K -2 2]),
text(80,1.5,'\epsilon_0'),
text(105,1.5,'\epsilon_2, \sigma_2');
xlabel('z')
box off
subplot(2,1,2)
plot(z,hy,'r',zd,y,'g'),
ylabel('H_y')
axis([5 K -2 2]),
text(80,1.5,'\epsilon_0'),text(105,1.5,'\epsilon_2, \sigma_2');
xlabel('z')
box off
pause(0.01)
end

```

Capítulo 10

Principios de radiación

Introducción

SI en cierto volumen V' se localizan cargas y corrientes (fuentes, Fig. 10.1(a)), al tomar una superficie cerrada S , en cuyo interior quede contenido V' , y evaluar el flujo de potencia electromagnética activa a través de ella, si éste es no nulo, entonces tales fuentes estarán *emitiendo* energía.

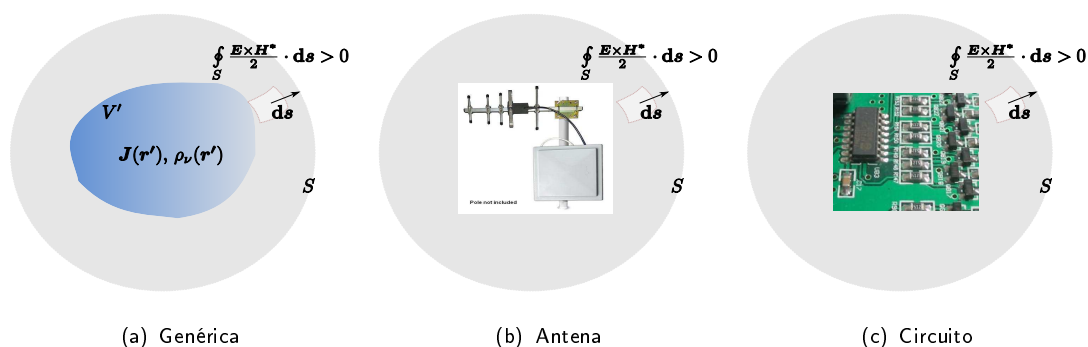


Figura 10.1: Distribuciones de fuentes.

Este desprendimiento de energía, que se denomina *radiación*, se detecta toda vez que la parte real del vector de POYNTING sea, en promedio, radial respecto al centro geométrico de la distribución de fuentes. La radiación puede ser un efecto deliberado o indeseado. Cuando se trata de una antena –Fig. 10.1(b)–, por ejemplo, la radiación es un proceso intencionado. Cuando se trata de un circuito –Fig. 10.1(c)–, en cambio, la radiación representa un problema de compatibilidad electromagnética. Conociendo en detalle como se produce la radiación, será posible diseñar antenas para que irradien con ciertas propiedades preestablecidas, o diseñar circuitos de modo que no lo hagan. Acerca de como hacer para que un circuito se someta a las leyes

de la Teoría de Circuitos sin que irradie se puede leer en la Ref. [25].

En el presente documento haremos énfasis en la deducción del conjunto de ecuaciones matemáticas que describen los campos de radiación producidos por fuentes primarias suspendidas en el espacio libre –Fig. 10.1(a)–. Sabemos, sin embargo, que en el mundo real es imposible forzar semejante distribución de fuentes impresas. Físicamente, la radiación ocurre porque cierta estructura material, llamada antena, puesta en proximidad de un campo primario, al interactuar con éste, esparce en el espacio circundante parte de la energía contenida en él en forma de un campo libre (dinámico) el cual se aleja radialmente. Invocando apropiadamente el Teorema de la Unicidad y el Principio de Equivalencia, los campos radiados pueden ser calculados, sin embargo, por integración de unas fuentes equivalentes que sustituyen a la antena y que pueden ser tratadas como fuentes impresas [26]. En todo caso, por ahora, la discusión de este asunto desde un punto de vista físico quedará pendiente. Acerca de como una antena emite parte de la potencia disponible en sus terminales (o puerto) de alimentación en forma de radiación se puede leer en la Ref. [27].

10.1. Expresión exacta de los campos a partir de las funciones potenciales para todos los puntos del espacio

El problema general de la radiación consiste, en su forma clásica, en estimar los campos eléctrico y magnético en los puntos suficientemente alejados de la distribución siguiendo el método integral, calculando primero, a partir de las fuentes $\mathbf{J}(\mathbf{r}')$ y $\rho_\nu(\mathbf{r}')$, las funciones potenciales $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ y $V(\mathbf{r})$, y a partir de éstas los campos eléctrico $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ y magnético $\mathbf{H}(\mathbf{r})$. La región definida por los puntos «suficientemente alejados» de las fuentes se suele denominar zona lejana, y es la zona que mayor interés práctico posee desde el punto de vista del diseño y análisis de los sistemas radiantes.

Las expresiones exactas de los campo eléctrico y magnético en función de las funciones potenciales \mathbf{A} y V son:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} \quad (10.1)$$

$$\mathbf{E} = -\nabla V - j\omega \mathbf{A} \quad (10.2)$$

donde:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \mathbf{J}(\mathbf{r}') \frac{e^{-j\kappa R}}{R} d\nu' \quad (10.3)$$

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{V'} \rho(\mathbf{r}') \frac{e^{-j\kappa R}}{R} d\nu' \quad (10.4)$$

donde $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$.

10.1.1. Expresión exacta del campo \mathbf{H}

Para obtener la expresión completa del campo magnético se puede sustituir la Ec. (10.3) en la Ec. (10.1)

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \left[\frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \mathbf{J}(\mathbf{r}') g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d\nu' \right] \quad (10.5)$$

donde $g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{e^{-j\kappa R}}{R}$, y como los operadores $\nabla \times$ y $\int_{V'} () d\nu'$ se pueden intercambiar, tomando el rotacional de la cantidad subintegral:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \nabla \times [\mathbf{J}(\mathbf{r}') g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] d\nu' \quad (10.6)$$

Recurriendo a la identidad vectorial $\nabla \times (\varphi \mathbf{A}) = (\nabla \varphi) \times \mathbf{A} + \varphi \nabla \times \mathbf{A}$, resulta

$$\nabla \times [\mathbf{J}(\mathbf{r}') g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] = \nabla g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \times \mathbf{J}(\mathbf{r}') + g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla \times \mathbf{J}(\mathbf{r}') \quad (10.7)$$

Toda vez que la densidad de corriente \mathbf{J} varía con \mathbf{r}' y que el operador rotacional contiene derivadas espaciales respecto a las variables no primadas, será $\nabla \times \mathbf{J}(\mathbf{r}') = 0$. El gradiente $\nabla g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ se resuelve con facilidad teniendo presente que $\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{a}_r$

$$\nabla g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \left(-j\kappa - \frac{1}{R} \right) g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{a}_r \quad (10.8)$$

Sustituyendo estos resultados en la Ec. (10.7) y luego ésta en la Ec. (10.6), y después de conmutar el orden de los factores del producto vectorial, se obtiene

$$\mathbf{H} = \underbrace{\frac{j\kappa}{4\pi} \int_{V'} \mathbf{J}(\mathbf{r}') \times g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{a}_R d\nu'}_{\mathbf{H}_R} + \underbrace{\frac{1}{4\pi} \int_{V'} \mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \frac{g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{R} \mathbf{a}_R d\nu'}_{\mathbf{H}_I} \quad (10.9)$$

donde \mathbf{H}_R , que varía con $\frac{1}{R}$, es el campo magnético de radiación y \mathbf{H}_I , el cual varía con $\frac{1}{R^2}$, es el campo magnético de inducción.

10.1.2. Expresión exacta del campo E

Para obtener la expresión completa del campo eléctrico se puede proceder de manera similar a como se procedió con el campo magnético, partiendo de la Ec. (10.2) directamente o de ésta después de utilizar la condición de calibración de LORENTZ ($\nabla \cdot \mathbf{A} = -j\omega\mu\epsilon V$), que convierte la mencionada Ec. (10.2) en la ecuación equivalente

$$\mathbf{E} = -\frac{j}{\omega\mu\epsilon}\nabla\nabla \cdot \mathbf{A} - j\omega\mathbf{A} \quad (10.10)$$

Partiremos de la Ec. (10.2) tomando el gradiente de la Ec. (10.4). Pudiéndose intercambiar los operadores ∇ y $\int_{V'}(\)d\nu'$, se deberá resolver $\nabla[\rho_\nu(\mathbf{r}')g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')]$. Ciertamente $\nabla[\rho_\nu(\mathbf{r}')g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] = \rho_\nu(\mathbf{r}')\nabla g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$. El resultado de $\nabla g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ se conoce del procedimiento anterior –Ec. (10.8)–, por lo que el campo eléctrico se podrá expresar de la forma:

$$\mathbf{E} = \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{V'} \rho(\mathbf{r}') \frac{g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{R} \mathbf{a}_R d\nu'}_{\mathbf{E}_I} + \underbrace{\frac{j}{4\pi} \int_{V'} \left[\frac{\kappa}{\epsilon} \rho(\mathbf{r}') \mathbf{a}_R - \omega\mu \mathbf{J}(\mathbf{r}') \right] g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d\nu'}_{\mathbf{E}_R} \quad (10.11)$$

donde \mathbf{E}_I , que varía con $\frac{1}{R^2}$, es el campo eléctrico de inducción y \mathbf{E}_R , el cual varía con $\frac{1}{R}$, es el campo eléctrico de radiación.

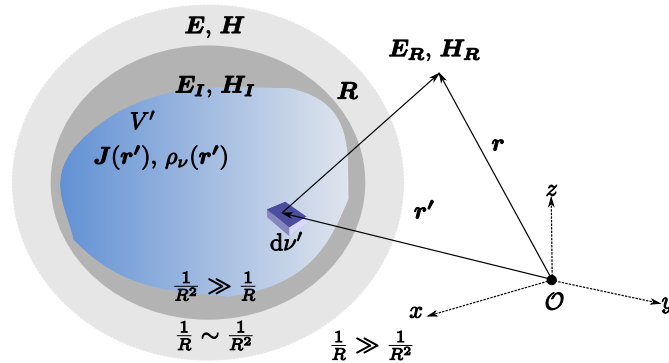


Figura 10.2: Las fuentes primarias de los campos (corrientes y cargas) se encuentran suspendidas en el espacio libre llenando con continuidad el volumen finito V pintado de azul. En V tales fuentes se distribuyen de acuerdo a las densidades $\mathbf{J}(\mathbf{r}')$ y $\rho_\nu(\mathbf{r}')$.

Los campos de inducción \mathbf{E}_I y \mathbf{H}_I predominan en los puntos muy próximos a la distribución ($R \rightarrow 0$), mientras que los campos de radiación prevalecen en los puntos muy alejados de la distribución ($R \rightarrow \infty$). En la Figura 10.2 se ilustran estas ideas. La región donde los campos se pueden aproximar por sus respectivas componentes de inducción se denomina zona cercana: en la zona cercana $\frac{1}{R^2} \gg \frac{1}{R}$.

La región donde los campos se pueden aproximar por sus respectivas componentes de radiación se denomina zona lejana: en la zona lejana se cumple que $\frac{1}{R} \gg \frac{1}{R^2}$. Entre la zona cercana y la zona lejana se localiza una región en la que ninguno de los dos tipos de campo descritos prevalece sobre el otro. En esta región, denominada zona intermedia, los campos se expresarán mediante las expresiones exactas (10.9) y (10.11).

10.2. Estudio de los campos de radiación

Las expresiones exactas de los campos de radiación contenidos en las Ecs. (10.9) y (10.11) son:

$$\mathbf{E}_R(\mathbf{r}) = \frac{J}{4\pi} \int_{V'} \left[\frac{\kappa}{\varepsilon} \rho(\mathbf{r}') \mathbf{a}_R - \omega \mu \mathbf{J}(\mathbf{r}') \right] g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV' \quad (10.12)$$

$$\mathbf{H}_R(\mathbf{r}) = \frac{J\kappa}{4\pi} \int_{V'} \mathbf{J}(\mathbf{r}') \times g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{a}_R dV' \quad (10.13)$$

10.2.1. Estructura de los campos de radiación a partir de la expresión aproximada de \mathbf{A} en la zona lejana

Para desentrañar la estructura de los campos de radiación contenidos en las Ecs. (10.12) y (10.13) procederemos de la manera convencional, ubicando el origen del sistema de referencia en el centro geométrico de la distribución como se muestra en la Fig. 10.3.

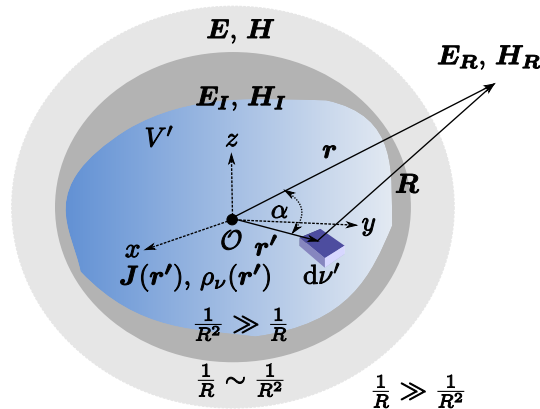


Figura 10.3: Ubicación del origen del sistema de coordenadas en el centro geométrico de la distribución de fuentes para la deducción de las expresiones simplificadas de los campos de radiación.

Esta decisión nos permitirá aplicar una serie de aproximaciones las cuales nos

conducirán a unas versiones, aunque simplificadas, técnicamente correctas de las Ecs. (10.12) y (10.13), a partir de las cuales será sencillo comprender el «comportamiento» espacial de los campos.

Basándonos en la Fig. 10.3 advertimos que los vectores \mathbf{R} , \mathbf{r} y \mathbf{r}' forman un triángulo, por lo que R , el módulo de \mathbf{R} , se puede poner en función de r y r' , usando el teorema del coseno:

$$R = (r^2 + r'^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')^{\frac{1}{2}} \quad (10.14)$$

Para $R \gg \text{máx}\{r'\}$, lo cual se cumple en la zona lejana, el término r' se puede despreciar y la expresión (10.14) se puede aproximar de la siguiente manera:

$$R \approx r \left(1 - 2\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (10.15)$$

Expandiendo el binomio $\left(1 - 2\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} \right)^{\frac{1}{2}}$ 1:

$$R \approx r \left[1 - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} \right)^2 \dots \right] \quad (10.16)$$

asumiremos las siguientes aproximaciones:

$$R \approx \begin{cases} r, & \text{para la amplitud;} \\ r - \mathbf{r}' \cdot \mathbf{a}_r, & \text{para la fase} \end{cases} \quad (10.17)$$

y además $\mathbf{a}_R \approx \mathbf{a}_r$.

Al sustituir las aproximaciones expresadas mediante la Ec. (10.17) en las Ecs. (10.12) y (10.13) se obtiene:

$$\mathbf{E}_R(\mathbf{r}) = -\frac{j\omega\mu}{4\pi} \frac{e^{-j\kappa r}}{r} \int_{V'} \mathbf{J}(\mathbf{r}') e^{j\kappa r' \cdot \mathbf{a}_r} dV' + \frac{j}{4\pi} \frac{e^{-j\kappa r}}{r} \int_{V'} \frac{\kappa}{\varepsilon} \rho(\mathbf{r}') \mathbf{a}_r e^{j\kappa r' \cdot \mathbf{a}_r} dV' \quad (10.18)$$

$$\mathbf{H}_R(\mathbf{r}) = \frac{j\kappa}{4\pi} \frac{e^{-j\kappa r}}{r} \int_{V'} \mathbf{J}(\mathbf{r}') \times e^{j\kappa r' \cdot \mathbf{a}_r} \mathbf{a}_r dV' \quad (10.19)$$

La Ecuación (10.18) requiere un poco de manipulación adicional para obtener una versión equivalente que exprese mejor la idea en ella contenida. Para ello vamos a hacer uso de la ecuación de continuidad de la corriente $\rho(\mathbf{r}') = \nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') / -j\omega$ en la segunda integral de la Ec. (10.18):

$$\frac{j}{4\pi} \frac{e^{-j\kappa r}}{r} \int_{V'} \frac{\kappa}{\varepsilon} \rho(\mathbf{r}') \mathbf{a}_r e^{j\kappa r' \cdot \mathbf{a}_r} dV' = \frac{\kappa}{4\pi\varepsilon\omega} \frac{e^{-j\kappa r}}{r} \int_{V'} \nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') e^{j\kappa r' \cdot \mathbf{a}_r} dV' \mathbf{a}_r \quad (10.20)$$

¹ $(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \dots$, siendo n un número natural o una fracción.

donde se ha extraído de la integral el vector unitario \mathbf{a}_r . Ya que $\nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') e^{j\kappa r' \cdot \mathbf{a}_r} = \nabla' \cdot [\mathbf{J}(\mathbf{r}') e^{j\kappa r' \cdot \mathbf{a}_r}] - \mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' e^{j\kappa r' \cdot \mathbf{a}_r}$ resulta:

$$\begin{aligned} \int_{V'} \nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') e^{j\kappa r' \cdot \mathbf{a}_r} dV' &= \int_{V'} \nabla' \cdot [\mathbf{J}(\mathbf{r}') e^{j\kappa r' \cdot \mathbf{a}_r}] dV' - \int_{V'} \mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' e^{j\kappa r' \cdot \mathbf{a}_r} dV' \\ &= \underbrace{\oint_{S'} [\mathbf{J}(\mathbf{r}') e^{j\kappa r' \cdot \mathbf{a}_r}] \cdot d\mathbf{s}}_{=0} - \int_{V'} \mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot j\kappa \mathbf{a}_r e^{j\kappa r' \cdot \mathbf{a}_r} dV' \\ &= -j\kappa \int_{V'} J_r(\mathbf{r}') e^{j\kappa r' \cdot \mathbf{a}_r} dV' \end{aligned}$$

que al sustituir en la Ec. (10.20) resulta:

$$\frac{j}{4\pi} \frac{e^{-j\kappa r}}{r} \int_{V'} \frac{\kappa}{\varepsilon} \rho(\mathbf{r}') \mathbf{a}_r e^{j\kappa r' \cdot \mathbf{a}_r} dV' = \frac{j\omega\mu}{4\pi} \frac{e^{-j\kappa r}}{r} \int_{V'} J_r(\mathbf{r}') \mathbf{a}_r e^{j\kappa r' \cdot \mathbf{a}_r} dV' \quad (10.21)$$

Al sustituir la Ec. (11.32) en la Ec. (10.18) se obtiene:

$$\mathbf{E}_R(\mathbf{r}) = -j\omega \left[\underbrace{\frac{\mu}{4\pi} \frac{e^{-j\kappa r}}{r} \int_{V'} \mathbf{J}(\mathbf{r}') e^{j\kappa r' \cdot \mathbf{a}_r} dV'}_{\mathbf{A}_{z\ell}} - \underbrace{\frac{\mu}{4\pi} \frac{e^{-j\kappa r}}{r} \int_{V'} J_r(\mathbf{r}') \mathbf{a}_r e^{j\kappa r' \cdot \mathbf{a}_r} dV'}_{\mathbf{A}_{z\ell r} \mathbf{a}_r} \right] \quad (10.22)$$

$$\mathbf{H}_R(\mathbf{r}) = -\frac{j\kappa}{\mu} \mathbf{a}_r \times \underbrace{\frac{\mu}{4\pi} \frac{e^{-j\kappa r}}{r} \int_{V'} \mathbf{J}(\mathbf{r}') e^{j\kappa r' \cdot \mathbf{a}_r} dV'}_{\mathbf{A}_{z\ell}} \quad (10.23)$$

Se define el Vector Potencial magnético aproximado en la zona lejana $\mathbf{A}_{z\ell}$:

$$\mathbf{A}_{z\ell}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \underbrace{\frac{e^{-j\kappa r}}{r}}_{OEE} \underbrace{\int_{V'} \mathbf{J}(\mathbf{r}') e^{j\kappa r' \cdot \mathbf{a}_r} dV'}_{\mathbf{N}(\mathbf{r})} \quad (10.24)$$

donde $\frac{e^{-j\kappa r}}{r}$ consiste en una onda esférica elemental (OEE) que parte del origen radialmente hacia el infinito, y la integral $\mathbf{N}(\mathbf{r})$ se denomina vector de radiación:

$$\mathbf{N}(\mathbf{r}) = \int_{V'} \mathbf{J}(\mathbf{r}') e^{j\kappa r' \cdot \mathbf{a}_r} dV' \quad (10.25)$$

Usando la definición anterior de vector potencial de zona lejana, los campos de radiación se pueden expresar de la forma compacta

$$\mathbf{E}_R(\mathbf{r}) = -j\omega (\mathbf{A}_{z\ell} - \mathbf{A}_{z\ell r} \mathbf{a}_r) \quad (10.26)$$

$$\mathbf{H}_R(\mathbf{r}) = -\frac{j\kappa}{\mu} \mathbf{a}_r \times \mathbf{A}_{z\ell} \quad (10.27)$$

A partir de las Ecuaciones (10.26) y (10.27) se puede inferir que los campos eléctrico y magnético de radiación viajan en la dirección radial \mathbf{a}_r . También inferimos

que tales campos son transversales respecto a esta dirección de propagación, que son entre si mutuamente ortogonales, y que la relación entre sus amplitudes complejas es idénticamente igual a la impedancia intrínseca del medio:

$$\frac{E_R}{H_R} = \frac{-j\omega\mu}{-j\kappa} = \eta \quad (10.28)$$

10.2.2. Vector de radiación

El vector de radiación $\mathbf{N}(\mathbf{r}) = \int_{V'} \mathbf{J}(\mathbf{r}') e^{j\kappa \mathbf{r}' \cdot \mathbf{a}_r} d\nu'$ consiste en la «suma» de todos los elementos de corriente desfasados, respecto al elemento ubicado en el origen, un ángulo proporcional a la distancia, medida en la dirección de observación del campo, entre el elemento de corriente considerado y el origen. Por ejemplo, al elemento de corriente $\mathbf{J}(\mathbf{r}') d\nu'$, ubicado en el punto fuente \mathbf{r}' , se le desfasa con un ángulo par a $\kappa \mathbf{r}' \cdot \mathbf{a}_r$, el cual es proporcional a la distancia $\mathbf{r}' \cdot \mathbf{a}_r$ entre el punto fuente y el origen, medida en la dirección hacia el punto de observación que viene dada por el vector unitario \mathbf{a}_r .

En coordenadas Cartesianas, el vector de radiación (10.25) se puede escribir de la forma

$$\mathbf{N}(\mathbf{r}) = \iiint_{V'} \mathbf{J}(\mathbf{r}') e^{j\kappa_x x'} e^{j\kappa_y y'} e^{j\kappa_z z'} dx' dy' dz' \quad (10.29)$$

donde $\kappa_x = \frac{2\pi}{\lambda} \sin \theta \cos \varphi$, $\kappa_y = \frac{2\pi}{\lambda} \sin \theta \sin \varphi$ y $\kappa_z = \frac{2\pi}{\lambda} \cos \theta$, e interpretarse como una transformada de Fourier tridimensional entre el dominio fuente (*posiciones de las fuentes* $[x', y', y z']$ o geometría de la distribución) y el dominio de observación (*ángulos de observación* $[\theta, \varphi]$), mediante las frecuencias espaciales κ_x , κ_y y κ_z .

Por otro lado, tomando en cuenta que $\mathbf{r}' = r' \sin \theta' \cos \varphi' \mathbf{a}_x + r' \sin \theta' \sin \varphi' \mathbf{a}_y + r' \cos \theta' \mathbf{a}_z$ escribiremos:

$$\kappa \cdot \mathbf{r}' = \frac{2\pi}{\lambda} r' (\sin \theta \sin \theta' \cos \varphi \cos \varphi' + \sin \theta \sin \theta' \sin \varphi \sin \varphi' + \cos \theta \cos \theta') \quad (10.30)$$

al integrar, el vector de radiación queda como una función solamente de los ángulos de observación θ y φ , esto es: $\mathbf{N}(\mathbf{r}) = \mathbf{N}(\theta, \varphi)$, y se podrá escribir de manera compacta

$$\mathbf{A}_{z\ell}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \frac{e^{-j\kappa r}}{r} \mathbf{N}(\theta, \varphi) \quad (10.31)$$

y además

$$\mathbf{E}_R(\mathbf{r}) = -j\omega \frac{\mu}{4\pi} \frac{e^{-j\kappa r}}{r} \mathbf{N}_T(\theta, \varphi) \quad (10.32)$$

donde $\mathbf{N}_T(\theta, \varphi) = N_\theta(\theta, \varphi) \mathbf{a}_\theta + N_\varphi(\theta, \varphi) \mathbf{a}_\varphi$ es la componente transversal (respecto a la dirección de propagación \mathbf{a}_r) del vector de radiación.

Ejemplo

Se desean calcular los campos \mathbf{E} y \mathbf{H} de radiación de una espira circular de corriente I_0 , de radio $a \ll \lambda$, dispuesta sobre el plano $z = 0$, centrada en el origen y orientada según el eje z (ver Fig. 10.4).

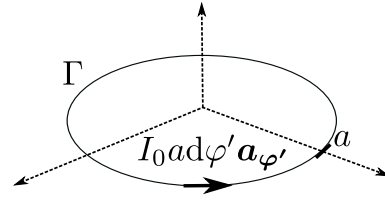


Figura 10.4: Espira circular de corriente I_0 , de radio $a \ll \lambda$, dispuesta sobre el plano $z = 0$, centrada en el origen y orientada según el eje z .

Sol.: en primer lugar se ha de calcular el Vector de Radiación $\mathbf{N} = \int_{V'} \mathbf{J}(\mathbf{r}') e^{j\kappa \mathbf{r}' \cdot \mathbf{a}_r} dV'$, para lo cual expandiremos $e^{j\kappa \mathbf{r}' \cdot \mathbf{a}_r}$ en una serie de potencias:

$$e^{j\kappa \mathbf{r}' \cdot \mathbf{a}_r} = 1 + j\kappa \mathbf{r}' \cdot \mathbf{a}_r + \frac{1}{2!} (j\kappa \mathbf{r}' \cdot \mathbf{a}_r)^2 + \dots + \frac{1}{n!} (j\kappa \mathbf{r}' \cdot \mathbf{a}_r)^n + \dots$$

y aplicaremos la siguiente aproximación $e^{j\kappa \mathbf{r}' \cdot \mathbf{a}_r} \approx 1 + j\kappa \mathbf{r}' \cdot \mathbf{a}_r$, donde se han despreciado los términos de orden superior a uno (¿por qué?). La integral a resolver asume la forma

$$\mathbf{N} = \oint_{\Gamma'} I_0 \mathbf{a}_{\varphi'} (1 + j\kappa \mathbf{r}' \cdot \mathbf{a}_r) dl'$$

tomando en cuenta que solo nos interesan las componentes transversales de \mathbf{N} y que

$$\mathbf{a}_{\varphi'} \cdot \mathbf{a}_\theta = \cos \theta \cos(\varphi - \varphi' - \pi/2)$$

$$\mathbf{a}_{\varphi'} \cdot \mathbf{a}_\varphi = \cos(\varphi - \varphi')$$

$$\mathbf{r}' \cdot \mathbf{a}_r = a \sin \theta \cos(\varphi - \varphi')$$

se obtiene

$$\mathbf{N}_T = jI_0 \kappa a^2 \pi \sin \theta \mathbf{a}_\varphi$$

A partir de aquí el campo eléctrico se puede calcular fácilmente usando la Ec. (10.32) como:

$$\mathbf{E} = \frac{I_0 \eta (\kappa a)^2}{4} \frac{e^{-j\kappa r}}{r} \sin \theta \mathbf{a}_\varphi$$

y el campo magnético como $\mathbf{H} = \mathbf{a}_r \times \frac{\mathbf{E}}{\eta}$:

$$\mathbf{H} = -\frac{I_0 (\kappa a)^2}{4} \frac{e^{-j\kappa r}}{r} \sin \theta \mathbf{a}_\theta$$

Problema

Obtenga \mathbf{N} , $\mathbf{A}_{z\ell}$, \mathbf{E}_R y \mathbf{H}_R para un dipolo de Hertz. El dipolo de Hertz consiste en un elemento filamentario de corriente. Una definición apropiada del dipolo de Hertz es la siguiente:

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}') = I_0 \delta(x') \delta(y') d\ell \mathbf{a}_z \quad (10.33)$$

Resp.: $\mathbf{N} = I_0 d\ell (-\sin \theta \mathbf{a}_\theta + \cos \theta \mathbf{a}_r)$, $\mathbf{A}_{z\ell} = \frac{\mu}{4\pi} \frac{e^{-j\kappa r}}{r} I_0 d\ell (-\sin \theta \mathbf{a}_\theta + \cos \theta \mathbf{a}_r)$,
 $\mathbf{E}_R = \frac{j\omega\mu}{4\pi} \frac{e^{-j\kappa r}}{r} I_0 d\ell \sin \theta \mathbf{a}_\theta$ y $\mathbf{H}_R = \frac{j\kappa}{4\pi} \frac{e^{-j\kappa r}}{r} I_0 d\ell \sin \theta \mathbf{a}_\varphi$.

En la página [WWW](#) (Fig. 3) se muestra una animación del campo eléctrico alrededor del dipolo de Hertz . El computo de dicho campo se realizó usando la expresión exacta del campo.

10.2.3. Condición de no radiación

Las propiedades de la radiación de una determinada distribución de corrientes están contenidas en la integral $\mathbf{N}(\theta, \varphi)$. Una inspección detallada de esta integral nos permitirá descifrar la clave para minimizar la radiación en aquellos casos donde ésta no se desee, como en la teoría de circuitos y en la teoría de líneas de transmisión. Debemos advertir, sin embargo, que una supresión completa de la radiación no es posible sino se apantalla apropiadamente la distribución de corrientes.

Con todo, es de interés general, dada una distribución de corrientes, conocer cuales condiciones se deben cumplir para reducir los campos de radiación a valores practicamente despreciables.

Para resolver esta cuestión procederemos, asumiendo que se pueda, a «arreglar» todos los elementos de corriente en parejas: cada elemento $\mathbf{J}(\mathbf{r}'_n) d\nu'_n$ con su *retorno* $\mathbf{J}(\mathbf{r}'_m) d\nu'_m$ —ver Fig. 10.5—, tal que $\mathbf{J}(\mathbf{r}'_n) d\nu'_n = -\mathbf{J}(\mathbf{r}'_m) d\nu'_m$, y a evaluar la aportación diferencial que dicha pareja hace al campo de radiación total.

En efecto, según la Ec. (10.32), tal aportación será proporcional a ambos elementos de corriente de la forma

$$\begin{aligned} d\mathbf{E}_R &\propto \mathbf{J}(\mathbf{r}'_n) e^{j\kappa r'_n \cdot \mathbf{a}_r} d\nu'_n + \mathbf{J}(\mathbf{r}'_m) e^{j\kappa r'_m \cdot \mathbf{a}_r} d\nu'_m \\ &\propto \mathbf{J}(\mathbf{r}'_n) d\nu'_n (e^{j\kappa r'_n \cdot \mathbf{a}_r} - e^{j\kappa r'_m \cdot \mathbf{a}_r}) \\ &\propto \mathbf{J}(\mathbf{r}'_n) d\nu'_n e^{j\kappa r'_n \cdot \mathbf{a}_r} (1 - e^{j\kappa \delta \mathbf{r}' \cdot \mathbf{a}_r}) \end{aligned} \quad (10.34)$$

donde $\delta \mathbf{r}' = \mathbf{r}'_m - \mathbf{r}'_n$ es un vector que une a ambos elementos de corriente. Ahora bien, si la distribución de corriente se la restringe para que el máximo valor de la dis-

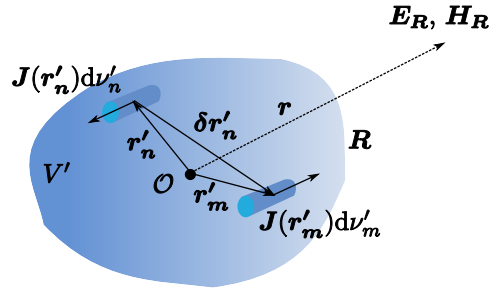


Figura 10.5: Detalle de la distribución en la que se muestran un elemento de corriente y su retorno

tancia entre un elemento de corriente y su retorno sea muy pequeño en comparación con la longitud de onda: $\text{máx}\{\delta r'\} \ll \lambda$, el ángulo de fase $\kappa \boldsymbol{\delta r}' \cdot \mathbf{a}_r \leq 2\pi \frac{\text{máx}\{\delta r'\}}{\lambda}$ será aproximadamente de orden cero, el exponencial $e^{j\kappa \boldsymbol{\delta r}' \cdot \mathbf{a}_r}$ de orden uno y el campo de radiación, que se obtiene integrando la Ec. (10.34), despreciable. Por esta razón, podemos declarar la condición $\text{máx}\{\delta r'\} \ll \lambda$, como la condición de no radiación de una distribución genérica de corrientes.

Un ejemplo práctico de aplicación de la condición de no radiación se observa cuando al implementar un circuito impreso se utilizan al menos dos capas: un plano conductor de cobre (+ un substrato dieléctrico) y una cara con las pistas de cobre sobre la que se sueldan los distintos elementos concentrados. En este caso, todos los retornos de corriente se desarrollan sobre el plano conductor, de tal suerte que el $\text{máx}\{\delta r'\}$ viene dado por el espesor del substrato.

Las líneas de transmisión también satisfacen la condición de no radiación toda vez que la separación entre los conductores es mucho menor que λ (esta condición también garantiza que los campos en la línea sean cuasi-TEM).

10.3. Características básicas de las antenas

10.3.1. Zona lejana

La zona lejana de una antena, la cual constituye la zona de interés de la antena, posee un límite inferior que se define como [28]:

$$r_{z\ell} = \text{máx} \left\{ r / \frac{r}{r'_{MAX}} \gg 1, \kappa r \gg 1 \right\} \quad (10.35)$$

El conjunto de la ecuación 10.35 contiene en realidad tres elementos, ya que la condición $r/r'_{MAX} \gg 1$ impone restricciones tanto de fase como de amplitud:

$$r_{z\ell} = \text{máx} \{r_{z\ell cp}, r_{z\ell ca}, r_{z\ell ca2}\} \quad (10.36)$$

donde $r_{z\ell cp}$ y $r_{z\ell ca}$ representan el límite inferior de la zona lejana por consideraciones de fase y amplitud, respectivamente, debido a la condición $r/r'_{MAX} \gg 1$, y $r_{z\ell ca2}$ representa el límite inferior de la zona lejana debido al término $\kappa r \gg 1$, el cual establece una restricción en la amplitud de los campos.

Si la máxima dimensión de la antena es D y su centro geométrico se hace coincidir con el centro del sistema de coordenadas, entonces este límite se puede expresar en función de D :

$$r_{z\ell} = \text{máx} \left\{ \frac{2D^2}{\lambda}, 50D, 20\lambda \right\} \quad (10.37)$$

10.3.2. Patrón de radiación

El patrón de radiación, en general, es la ley variación de la intensidad del campo (eléctrico) o de la potencia asociada a este, en función de los ángulos θ y φ en la zona lejana.

El diagrama de radiación (normalizado) se define en función de las componentes E_θ y E_φ del campo eléctrico, en función del campo \mathbf{E} total, o en función de la potencia radiada (ver Cuadro 10.1)[28].

El diagrama de radiación se calcula teóricamente o se mide experimentalmente. Existen diferentes métodos de representación gráfica: polar 3D, polar 2D, Cartesiano y cartográfico.

La representación polar 3D consiste en la superficie $r = F(\theta, \varphi)$. En la Figura 10.6 se muestra el digrama de radiación 3D de un dipolo de longitud 2λ , asumiendo una distribución de corriente senoidal. Los diagramas de radiación más comunes son: toroidales, haz pincelado, haz en abanico, y cosecante. El diagrama de radiación polar 2D se obtiene seccionando el diagrama polar 3D mediante planos apropiados: $r = F(\theta, \varphi_1)$, $r = F(\theta_1, \varphi)$.

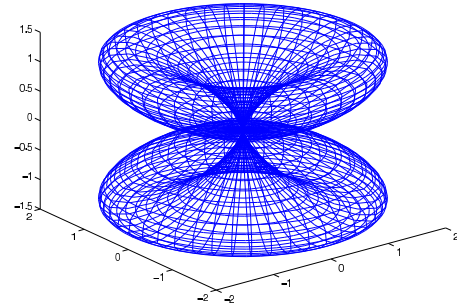


Figura 10.6: Patrón de radiación 3D: $r = F(\theta, \varphi)$.

En la Figuras 10.7(a) y 10.7(c) se muestran dos diagramas de radiación polares de una misma antena. En la Figura 10.7(a) se muestra un diagrama de radiación polar con una escala logarítmica. En la Figura 10.7(c) se muestra un diagrama de radiación polar con una escala lineal.

En la Figuras 10.7(a) y 10.7(c) se muestran dos diagramas de radiación polares de una misma antena. En la Figura 10.7(a) se muestra un diagrama de radiación polar con una escala logarítmica. En la Figura 10.7(c) se muestra un diagrama de radiación polar con una escala lineal. Se observa claramente como al usar una escala lineal los lóbulos secundarios quedan escondidos, mientras la escala logarítmica permite apreciar mejor estos lóbulos secundarios. Usualmente se emplean 2, 3, 6 o 9 de estos diagramas para representar el patrón de radiación de la antena. Se definen los planos

Cuadro 10.1: Diagramas de radiación $F_\theta(\theta, \varphi)$, $F_\varphi(\theta, \varphi)$, $F(\theta, \varphi)$ y $|F_\theta(\theta, \varphi)|^2$ de una antena ($\mathbf{N}_T(\theta, \varphi) = N_\theta(\theta, \varphi)\mathbf{a}_\theta + N_\varphi(\theta, \varphi)\mathbf{a}_\varphi$).

de E_θ :	$F_\theta(\theta, \varphi) \equiv \frac{ E_\theta(r, \theta, \varphi) }{ E_\theta(r, \theta^*, \varphi^*) _{MAX}}$	$F_\theta(\theta, \varphi) \equiv \frac{ N_\theta(\theta, \varphi) }{ N_\theta(\theta^*, \varphi^*) _{MAX}}$
de E_φ :	$F_\varphi(\theta, \varphi) \equiv \frac{ E_\varphi(r, \theta, \varphi) }{ E_\varphi(r, \theta^*, \varphi^*) _{MAX}}$	$F_\varphi(\theta, \varphi) \equiv \frac{ N_\varphi(\theta, \varphi) }{ N_\varphi(\theta^*, \varphi^*) _{MAX}}$
de \mathbf{E} :	$F(\theta, \varphi) \equiv \frac{ \mathbf{E}_{z\ell}(r, \theta, \varphi) }{ \mathbf{E}_{z\ell}(r, \theta^\circ, \varphi^\circ) _{MAX}}$	$F(\theta, \varphi) \equiv \frac{ \mathbf{N}_T(\theta, \varphi) }{ \mathbf{N}_T(\theta^\circ, \varphi^\circ) _{MAX}}$
de potencia:	$ F(\theta, \varphi) ^2 \equiv \frac{S_r(r, \theta, \varphi)}{S_r(r, \theta^\circ, \varphi^\circ)_{MAX}}$	

E y H: el plano E es el plano paralelo al campo \mathbf{E} y el plano H es el plano paralelo al campo \mathbf{H} . El diagrama de radiación Cartesiano se obtiene poniendo en el eje de las abscisas la variable angular correspondiente (θ o φ), y en el de las ordenadas el valor de $F(\theta, \varphi)$ –ver Fig. 10.7(b)–. En los diagramas de radiación Cartesianos la escala de las ordenadas puede ser lineal, cuadrática o logarítmica.

El diagrama de radiación cartográfico consiste en una serie de curvas de nivel que se obtienen al poner $F(\theta, \varphi) = u$, fijado r , con u como parámetro. En la figura 10.8 se muestran las curvas de nivel de la *PIRE* (**potencia isotrópica radiada equivalente**) en dBW² de dos satélites.

10.3.3. Apertura de haz y nivel de lóbulos secundarios

La **apertura del haz** principal se suele medir sobre un plano que contenga el origen y al máximo del patrón de radiación – $F(\theta, \varphi) = 1$ – y consiste en el ángulo formado por los radiales en correspondencia de los cuales $F(\theta, \varphi)^2 = 1/2$ o $|\mathbf{E}_{z\ell}| = |\mathbf{E}_{z\ell}(r, \theta^\circ, \varphi^\circ)|_{MAX} / \sqrt{2}$.

El **nivel de radiación secundaria** (N_{ls}) se suele medir mediante la relación del máximo del mayor de los lóbulos secundario y el máximo del lóbulo principal:

$$N_{ls} [\text{dB}] = 10 \log \left[\frac{F(\theta^{\circ s}, \varphi^{\circ s})_{MAX}^2}{F(\theta^\circ, \varphi^\circ)_{MAX}^2} \right] = 10 \log F(\theta^{\circ s}, \varphi^{\circ s})^2 \quad (10.38)$$

donde $(\theta^{\circ s}, \varphi^{\circ s})$ es la dirección del máximo del mayor de los lóbulos secundarios.

²PIRE = $P_{rad}D = P_eG$.

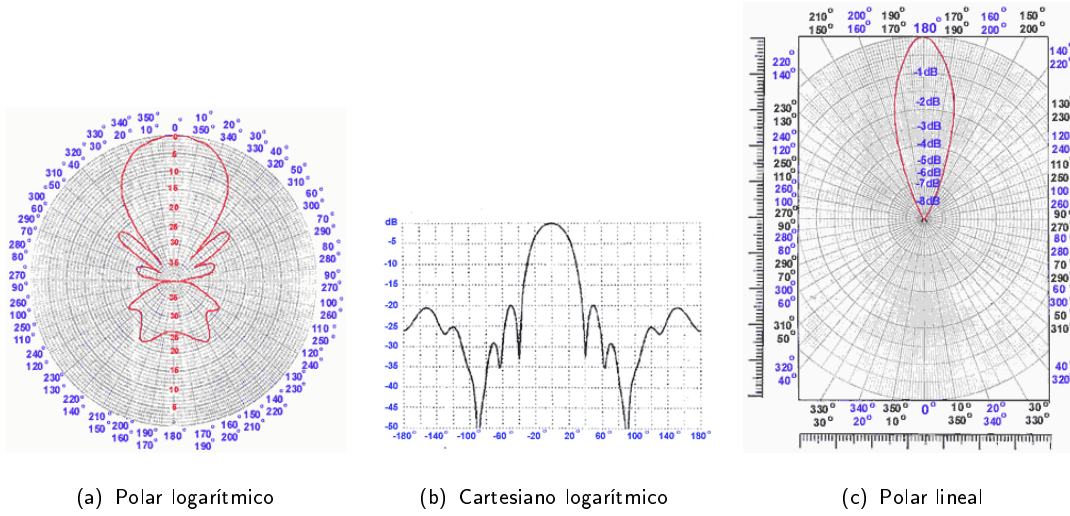


Figura 10.7: Diagramas de radiación 2D (tomados de <http://www.astronwireless.com/>).

10.3.4. Polarización

Se define en general en la dirección de máxima ganancia de la antena. Se refiere a la variación de la dirección y amplitud relativa del campo eléctrico, y en particular a la *figura* trazada, en función del tiempo, por el extremo del vector en un punto fijo del espacio y al *sentido* en el cual dicha figura es trazada [29].

Tomando en cuenta que el campo en la zona lejana tiene la forma:

$$\mathbf{E} = -\frac{j\kappa\eta}{4\pi} \frac{e^{-j\kappa r}}{r} \mathbf{N}_T(\theta, \varphi)$$

Si se define el **vector de polarización**:

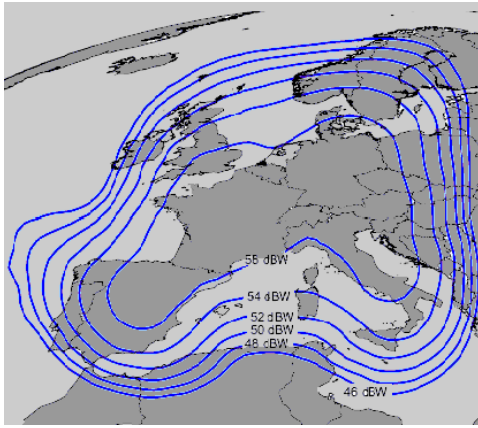
$$\mathbf{p}(\theta, \varphi) = \frac{\mathbf{N}_T(\theta, \varphi)}{|\mathbf{N}_T(\theta, \varphi)|}$$

el cual tendrá la apariencia general $\mathbf{p}(\theta, \varphi) = p_\theta(\theta, \varphi)\mathbf{a}_\theta + p_\varphi(\theta, \varphi)\mathbf{a}_\varphi$ (ver Fig. 10.9), siendo $p_{\theta,\varphi}(\theta, \varphi)$ cantidades complejas $p_{\theta,\varphi}(\theta, \varphi) = |p_{\theta,\varphi}(\theta, \varphi)|e^{j\Psi_{\theta,\varphi}(\theta,\varphi)}$. El campo eléctrico se podrá escribir:

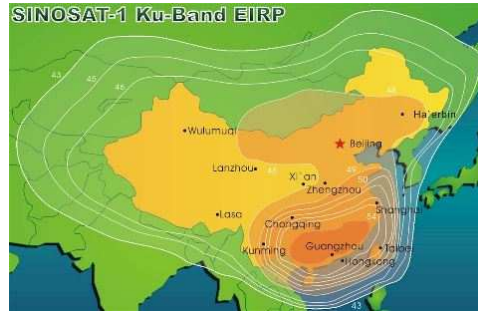
$$\mathbf{E} = -\frac{j\kappa\eta}{4\pi} \frac{e^{-j\kappa r}}{r} |\mathbf{N}_T(\theta, \varphi)| \mathbf{p}(\theta, \varphi) \quad (10.39)$$

y ya que: $|\mathbf{N}_T(\theta, \varphi)| = |\mathbf{N}_T(\theta^\diamond, \varphi^\diamond)|_{MAX} F(\theta, \varphi)$, se obtiene finalmente una expresión para el campo eléctrico en función del patrón de radiación:

$$\mathbf{E} = -\frac{j\kappa\eta}{4\pi} \frac{e^{-j\kappa r}}{r} |\mathbf{N}_T(\theta^\diamond, \varphi^\diamond)|_{MAX} F(\theta, \varphi) \mathbf{p}(\theta, \varphi) \quad (10.40)$$



(a) Mapa de contornos del satélite Tooway TM banda *Ka* (Fuente: <http://www.satsig.net/tooway/tooway-satellite.htm>)



(b) Mapa de contornos del satélite Sinosat 1 banda *Ku* (43 to 54 dBW) (Fuente: <http://www.satsig.net/sinosat/sinosat-satellite.htm>)

Figura 10.8: Diagramas de radiación cartográficos o huellas satelitales.

Si se pone, además:

$$V_o = \frac{\kappa\eta}{4\pi} |\mathbf{N}_T(\theta^\circ, \varphi^\circ)|_{MAX} \quad (10.41)$$

el campo eléctrico se puede escribir de una forma más cómoda:

$$\mathbf{E} = -jV_o \frac{e^{-j\kappa r}}{r} F(\theta, \varphi) \mathbf{p}(\theta, \varphi) \quad (10.42)$$

lo mismo dígase del vector de Poynting (10.41):

$$S(r, \theta, \varphi) = \frac{V_o^2}{2\eta r^2} F(\theta, \varphi)^2 \mathbf{a}_r \quad (10.43)$$

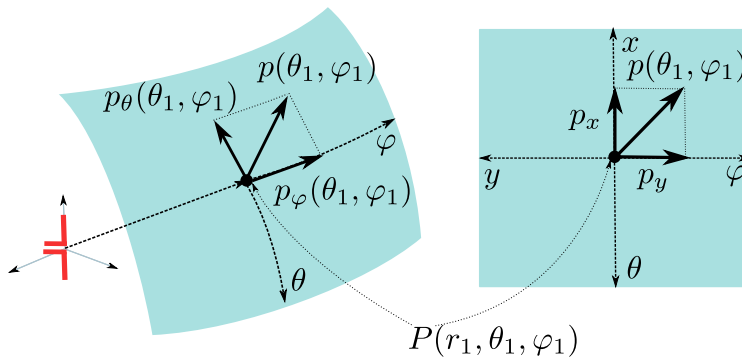


Figura 10.9: Detalle en la zona lejana de los sistemas de coordenadas esférico (general) y cartesiano (local) para la definición del vector de polarización

En un punto dado de la zona lejana, en la dirección (θ_1, φ_1) , y en un entorno no muy grande de este punto, la onda electromagnética se puede expresar en función de un sistema de referencia local definido en coordenadas Cartesianas (ver Fig. 10.9).

Para ello se procede a aproximar un pequeño sector de superficie esférica que contenga en su centro al punto de observación por un sector de superficie plana transversal a la dirección de propagación de los campos. En dicha superficie los campos se pueden considerar constantes y poner: $\mathbf{a}_x \triangleq -\mathbf{a}_\theta$ y $\mathbf{a}_y \triangleq -\mathbf{a}_\varphi$ de modo que:

$$p_\theta(\theta_1, \varphi_1)\mathbf{a}_\theta + p_\varphi(\theta_1, \varphi_1)\mathbf{a}_\varphi \triangleq p_x\mathbf{a}_x + p_y\mathbf{a}_y \quad (10.44)$$

donde: $p_{x,y} = -p_{\theta,\varphi}(\theta_1, \varphi_1)$, o equivalentemente:

$$|p_\theta(\theta_1, \varphi_1)|e^{j\Psi_\theta(\theta_1, \varphi_1)}\mathbf{a}_\theta + |p_\varphi(\theta_1, \varphi_1)|e^{j\Psi_\varphi(\theta_1, \varphi_1)}\mathbf{a}_\varphi \triangleq |p_x|e^{j\Psi_x}\mathbf{a}_x + |p_y|e^{j\Psi_y}\mathbf{a}_y \quad (10.45)$$

donde: $|p_{x,y}|e^{j\Psi_{x,y}} = -|p_{\theta,\varphi}(\theta_1, \varphi_1)|e^{j\Psi_{\theta,\varphi}(\theta_1, \varphi_1)}$. Tomando en cuenta que $\mathcal{E}(\mathbf{r}, t) = \Re\{\mathbf{E}(\mathbf{r})e^{j\omega t}\}$ podremos escribir:

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{V_o F(\theta_1, \varphi_1)}{r} \left[|p_x| \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2} - \kappa r + \Psi_x\right)\mathbf{a}_x + |p_y| \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2} - \kappa r + \Psi_y\right)\mathbf{a}_y \right] \quad (10.46)$$

Y dado que las variaciones del campo con r , en un entorno radial Δr pequeño alrededor del punto de observación, se pueden considerar como variaciones locales del campo respecto de la variable z , y poniendo $\mathcal{E}_{x,y} \cong V_o F(\theta_1, \varphi_1)|p_{x,y}|/r$, se obtiene:

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}, t) = \mathcal{E}_x \cos\left(\omega t - \kappa z + \Psi_x - \frac{\pi}{2}\right)\mathbf{a}_x + \mathcal{E}_y \cos\left(\omega t - \kappa z + \Psi_y - \frac{\pi}{2}\right)\mathbf{a}_y \quad (10.47)$$

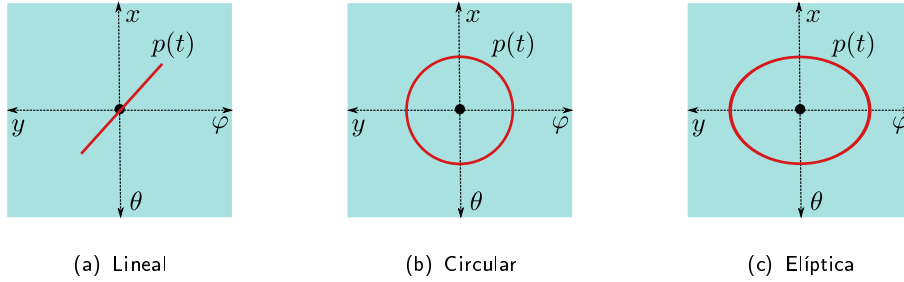


Figura 10.10: Tipos de polarización.

Dado que la Ecuación (10.47) tiene la apariencia de una onda plana, se conviene en asumir que, para un entorno suficientemente pequeño alrededor de un punto genérico en la zona lejana de la antena, las ondas electromagnéticas radiadas por ésta se pueden considerar localmente planas.

Tomando como referencia la ecuación 10.47 los tipos de polarización ya estudiados de una onda plana, los cuales se ilustran en la Fig. 10.10 y se definen en forma sucinta en el Cuadro 10.2, sirven de base para definir la polarización de la antena como una función de (θ, φ) .

Cuadro 10.2: Tipos de polarización. $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, SH está por sentido horario y SAH por sentido antihorario.

<i>P. lineal</i>		$\Psi_y - \Psi_x = n\pi$
<i>P. circular</i>	$\mathcal{E}_x = \mathcal{E}_y$	$\Psi_y - \Psi_x = \begin{cases} + \left(\frac{1}{2} + 2n\right) \pi, & \text{SH;} \\ - \left(\frac{1}{2} + 2n\right) \pi, & \text{SAH} \end{cases}$
<i>P. elíptica</i>	$\mathcal{E}_x \neq \mathcal{E}_y$	$\Psi_y - \Psi_x = \begin{cases} + \left(\frac{1}{2} + 2n\right) \pi, & \text{SH} \\ - \left(\frac{1}{2} + 2n\right) \pi, & \text{SAH} \end{cases}$
	$\forall(\mathcal{E}_x, \mathcal{E}_y)$	$\Psi_y - \Psi_x \neq \pm \frac{n}{2}\pi = \begin{cases} > 0, & \text{SH} \\ < 0, & \text{SAH} \end{cases}$

10.3.5. Directividad

La **Directividad** $D(\theta, \varphi)$, se define como la razón de la densidad de potencia radiada en un punto determinado por la antena en consideración, a la densidad de potencia radiada en el mismo punto por una antena de referencia isotrópica, a paridad de potencia radiada. Equivalentemente, se define como la relación entre la potencia radiada por una antena de referencia isotrópica y la potencia radiada por la antena bajo consideración, a paridad de densidad de potencia radiada en el punto donde se desea medir tal directividad:

$$D(\theta, \varphi) = D_i(\theta, \varphi) = \frac{S(r, \theta, \varphi)}{S_i} \Big|_{P_{rad}=P_{irad}} = \frac{P_{irad}}{P_{rad}} \Big|_{S(r, \theta, \varphi)=S_i} \quad (10.48)$$

Substituyendo en la ecuación 10.48 las expresiones de la densidad de potencia de una antena genérica y de una antena isotrópica (Cuadro 10.3), se obtiene la expresión de la Ganancia directiva:

$$D(\theta, \varphi) = D_i(\theta, \varphi) = \frac{4\pi F(\theta, \varphi)^2}{\oint_{4\pi} F(\theta, \varphi)^2 d\Omega} \quad (10.49)$$

En la práctica se suele hablar de **Directividad** D_0 para referirse al valor máximo de la Ganancia directiva:

$$D_0 = \text{máx}\{D(\theta, \varphi)\} \quad (10.50)$$

Cuadro 10.3: Expresiones de interés.

Densidad de potencia	
<i>Antena genérica</i>	<i>Antena isotrópica</i>
$S(r, \theta, \varphi) = S(r, \theta^\circ, \varphi^\circ)_{MAX} F(\theta, \varphi)^2 \mathbf{a}_r$	$S_i = \frac{P_{irad}}{4\pi r^2}$
Potencia radiada	
<i>Antena genérica</i>	<i>Antena isotrópica</i>
$P_{rad} = S(r, \theta^\circ, \varphi^\circ)_{MAX} r^2 \oint_{\Omega=4\pi} F(\theta, \varphi)^2 d\Omega$	P_{irad}

Y además, se suelen emplear, con preferencia respecto a la idealizada antena isotrópica, antenas de referencia reales.

Entre las antenas de referencia más usadas, además de la antena isotrópica, se encuentran: el dipolo de Hertz y de $\lambda/2$ (para frecuencias desde LF hasta UHF), la antena de bocina (para frecuencias más altas), etc. Por esta razón, es común escribir D_{10} para indicar la Directividad de la antena 1 respecto a la antena de referencia 0.

Cuadro 10.4: Directividad de una antena.

Antena de referencia	Directividad
Antena isotrópica	$D_{1i}(\theta, \varphi) = \frac{4\pi}{\oint_{4\pi} F(\theta, \varphi)^2 d\Omega}$
Antena genérica	$D_{10} = \frac{\oint_{4\pi} F_0(\theta, \varphi)^2 d\Omega}{\oint_{4\pi} F_1(\theta, \varphi)^2 d\Omega} = \frac{D_{1i}}{D_{0i}}$
$D \text{ [dB]} = 10 \log D$	

Ejemplo.

Se desea calcular la densidad de potencia por unidad de superficie (módulo de \mathbf{S}), a r metros y en la dirección de (θ_1, φ_1) , radiada por una antena para la cual

$F^2(\theta_1, \varphi_1) = -20\text{dB}$, siendo su Directividad de $D = 45\text{dB}$, si la potencia radiada total es de $P_{RAD} = 5\text{W}$.

Sol.: la antena irradia en la dirección de máxima radiación $S = \frac{P_{RAD}}{4\pi r^2} D$ [W/m^2], o equivalentemente (por m^2):

$$\begin{aligned} S_{MAX} &= 10 \log(5000)\text{dBm} + 45\text{dB} - 10 \log(4\pi)\text{dB} - 20 \log(r)\text{dB} \\ &= 36,99\text{dBm} + 45\text{dB} - 10,992\text{dB} - 20 \log(r)\text{dB} \\ &= 70,998\text{dBm} - 20 \log(r)\text{dB} \end{aligned}$$

y como $S(r, \theta_1, \varphi_1) = S_{MAX} F^2(\theta_1, \varphi_1)$, se tiene que (por m^2):

$$\begin{aligned} S(r, \theta_1, \varphi_1) &= 70,998\text{dBm} - 20 \log(r)\text{dB} - 20\text{dB} \\ &= 50,998\text{dBm} - 20 \log(r)\text{dB} \end{aligned}$$

10.3.6. Impedancia de entrada de la antena

Desde el punto de vista circuital, la antena se modela mediante una impedancia $Z_A = R_{rad} + R_p + jX_A$, donde R_{rad} es la resistencia de radiación, la cual modela las perdidas de potencia en la antena por radiación $P_{rad} = 1/2 |I_A|^2 R_{rad}$, R_p es la resistencia de pérdidas, la cual modela las pérdidas en la antena por efecto Joule (conducción) y por polarización del dieléctrico, y X_A es la reactancia de la antena, la cual modela la energía almacenada en el campo electromagnético de inducción en proximidad de la antena.

Problema

Dado un dipolo de Hertz, de longitud $\lambda/50$, calcule (a) el valor de la corriente de alimentación I_0 para que $S(100, \pi/4, 0) = 0$ dBm sobre metro cuadrado y (b) la resistencia de radiación del dipolo.

Resp.: (a) $I_0 = 32,574$ A, (b) $0,316 \Omega$.

10.3.7. Ganancia de potencia de la antena

Ya que parte de la potencia que se entrega a los terminales de alimentación no es radiada y se disipa por conducción y polarización del dieléctrico en la antena misma, se define el parámetro **Ganancia de potencia de la antena**, G , que es similar al de Directividad pero que tiene en cuenta estas pérdidas:

$$G(\theta, \varphi) = eD(\theta, \varphi) \quad (10.51)$$

donde e es la denominada **eficiencia de radiación**:

$$e = \frac{P_{rad}}{P_e} \quad (10.52)$$

donde P_{rad} es la potencia radiada por la antena y P_e es la potencia de entrada en los terminales de la antena. También se suele emplear el término **Ganancia** para referirse al máximo de la ecuación 10.51:

$$G = \text{máx}\{G(\theta, \varphi)\} = eD \quad (10.53)$$

10.3.8. Eficiencia de la Antena

La **eficiencia total** de la antena e_t se usa para estimar la pérdida total de energía debido a:

mirando hacia la línea de transmisión: la desadaptación de impedancias,

en el interior de la antena: las pérdidas por conducción, y polarización eléctrica
y

mirando hacia el espacio libre: las pérdidas por desadaptación de la polarización de los campos.

$$e_t = e_r e e_p \quad (10.54)$$

$$e_r = 1 - |\Gamma|^2 \quad (10.55)$$

$$e_p = |\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_a|^2 \quad (10.56)$$

donde e_r es la **eficiencia de reflexión**, e es la **eficiencia de radiación**, e_p es la **eficiencia de polarización** –también denominado factor de pérdidas por polarización (PLF)–, \mathbf{p}_i es el vector de polarización del campo eléctrico incidente, \mathbf{p}_a es vector de polarización de la antena, $\Gamma = Z_A - Z_o / Z_A + Z_o$, y Z_A es la impedancia de entrada de la antena y Z_o es la impedancia característica de la línea de transmisión.

10.3.9. Área efectiva de la antena

El área efectiva de la antena (A_e) se define como la relación entre la potencia disponible en los terminales de la antena (P_A) y la densidad de potencia del campo que incide sobre la antena ($S = \frac{\eta}{8\lambda^2 r^2} |\mathbf{N}(\theta, \varphi)|^2$), asumiendo adaptación de polarización de los campos:

$$A_e = \frac{P_A}{S} \quad (10.57)$$

Relación Directividad-área efectiva

Para todas las antenas se cumple³:

$$\frac{D}{A_e} = \gamma = \frac{4\pi}{\lambda^2} \quad (10.58)$$

10.3.10. Ecuación de Friis

Dada la potencia incidente P_i en los terminales de entrada de la antena transmisora, la potencia P_s de salida en los terminales de la antena receptora se puede calcular mediante la fórmula de Friis:

$$P_s = \frac{P_i e_{rTx} e}{4\pi r^2} D_{Tx}(\theta, \varphi) e_p D_{Rx}(\theta, \varphi) \frac{\lambda^2}{4\pi} e_{rRx} e_{Rx} \quad (10.59)$$

Problema

Sobre el dibujo del sistema $T_x - R_x$ de la Figura 10.11 coloque los diferentes términos de la Ecuación de Friis (2 ptos.). Considere luego lo siguiente: el receptor tiene un rango dinámico de 0,5–5 mV y una impedancia de entrada de 50 Ω . El LNA tiene una ganancia de 16 dB. La distancia entre las antenas es de 2 Km. Asumiendo una frecuencia de operación de 900 MHz, que $G_{T_x} = 25 \text{ dB} = G_{R_x}$ en la dirección del enlace, que las antenas no presentan pérdidas y están adaptadas, y que la eficiencia de polarización es uno, calcule:

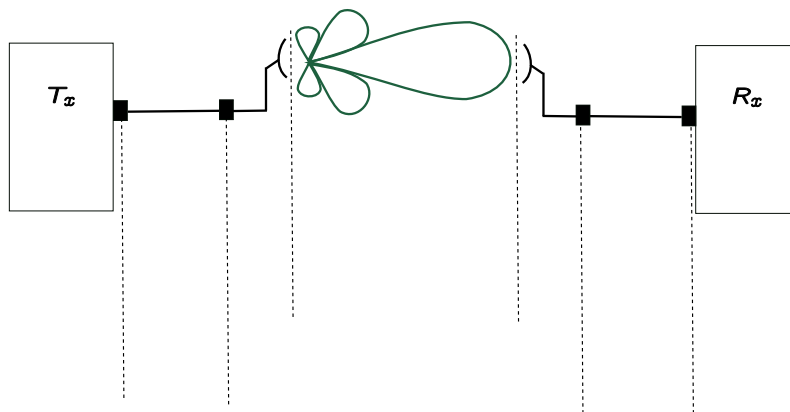


Figura 10.11: Figura del Problema.

1. El valor mínimo de P_{RAD} que garantice la recepción dentro del rango dinámico del receptor.

³OJO: demostrar utilizando el teorema de reciprocidad.

2. S y E en la antena receptora para el valor de P_{RAD} calculado previamente.
3. V_{out} de salida del LNA.
4. El factor K de la antena receptora.

Problema

Estudio de un array de dos espiras circulares. Dada una antena formada por un par de espiras circulares de radio $a \ll \lambda$, ambas de sección transversal circular de radio $b \ll a$, alimentadas con una corriente I_0 , y separadas una distancia $h = \lambda/4$, calcule:

1. El vector de radiación \mathbf{N} .
2. Los campos \mathbf{A} , \mathbf{E} y \mathbf{H} en la zona lejana.
3. Calcule \mathbf{S} y P_{rad} .
4. Calcule la Ganancia directiva y la Directividad.
5. Represente en forma Cartesiana $F(\theta, \pi/2)$ y $F(\pi/2, \varphi)$.

Resp.:

1. El vector de radiación viene dado por:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{N}(\mathbf{r}) &= \int_{V'} \mathbf{J}(\mathbf{r}') e^{j\kappa \mathbf{r}' \cdot \mathbf{a}_r} dV' \\
 &= \oint_{\Gamma_1 + \Gamma_2} I_0 \mathbf{a}_{\varphi'} e^{j\kappa \mathbf{r}' \cdot \mathbf{a}_r} a d\varphi' \\
 &= I_0 a \oint_{2\pi} \mathbf{a}_{\varphi'} e^{j\kappa[(\lambda/8)\mathbf{a}_z + a\mathbf{a}_{\rho'}] \cdot \mathbf{a}_r} d\varphi' + I_0 a \oint_{2\pi} \mathbf{a}_{\varphi'} e^{j\kappa[-(\lambda/8)\mathbf{a}_z + a\mathbf{a}_{\rho'}] \cdot \mathbf{a}_r} d\varphi' \\
 &= I_0 a \oint_{2\pi} \mathbf{a}_{\varphi'} e^{j\kappa(\lambda/8)\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_r} e^{j\kappa a \mathbf{a}_{\rho'} \cdot \mathbf{a}_r} d\varphi' + I_0 a \oint_{2\pi} \mathbf{a}_{\varphi'} e^{j\kappa - (\lambda/8)\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_r} e^{j\kappa a \mathbf{a}_{\rho'} \cdot \mathbf{a}_r} d\varphi'
 \end{aligned}$$

al aproximar $e^{j\kappa a \mathbf{a}_{\rho'} \cdot \mathbf{a}_r} \approx j\kappa a \mathbf{a}_{\rho'} \cdot \mathbf{a}_r$ ⁴, y después de simples manipulaciones, la expresión anterior se puede describir de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{N}(\mathbf{r}) &= j\kappa I_0 a^2 \oint_{2\pi} \mathbf{a}_{\varphi'} \left[e^{j\kappa(\lambda/8)\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_r} + e^{-j\kappa(\lambda/8)\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_r} \right] (\mathbf{a}_{\rho'} \cdot \mathbf{a}_r) d\varphi' \\
 &= j\kappa I_0 a^2 \oint_{2\pi} \mathbf{a}_{\varphi'} 2 \cos[\kappa(\lambda/8) \cos \theta] (\mathbf{a}_{\rho'} \cdot \mathbf{a}_r) d\varphi' \\
 &= 2 \cos[\kappa(\lambda/8) \cos \theta] \underbrace{j\kappa I_0 a^2 \oint_{2\pi} \mathbf{a}_{\varphi'} (\mathbf{a}_{\rho'} \cdot \mathbf{a}_r) d\varphi'}_{\mathbf{N} \text{ de una espira}}
 \end{aligned}$$

⁴¿Por qué podemos admitir tal aproximación?

y tomando en cuenta que:

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_{\varphi'} &= \sin \theta \cos[\pi/2 - (\varphi - \varphi')] \mathbf{a}_r + \cos \theta \cos[\pi/2 - (\varphi - \varphi')] \mathbf{a}_\theta + \cos(\varphi - \varphi') \mathbf{a}_\varphi \\ \mathbf{a}_{\varphi'} \cdot \mathbf{a}_r &= \sin \theta \cos(\varphi - \varphi')\end{aligned}$$

tenemos:

$$\mathbf{N} = \cos[(\pi/4) \cos \theta] 2j\kappa I_0 a^2 \pi \sin \theta \mathbf{a}_\varphi$$

2. De aquí sigue que:

$$a) \mathbf{A}_{z\ell} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{-j\kappa r}}{r} \cos[(\pi/4) \cos \theta] 2j\kappa I_0 a^2 \pi \sin \theta \mathbf{a}_\varphi$$

$$b) \mathbf{E} = -\frac{\eta \kappa^2 I_0 a^2}{2} \frac{e^{-j\kappa r}}{r} \cos[(\pi/4) \cos \theta] \sin \theta \mathbf{a}_\varphi$$

$$c) \mathbf{H} = \frac{\kappa^2 I_0 a^2}{2} \frac{e^{-j\kappa r}}{r} \cos[(\pi/4) \cos \theta] \sin \theta \mathbf{a}_\theta$$

3. A partir de los campos \mathbf{E} y \mathbf{H} podemos calcular:

a) El vector de Poynting \mathbf{S} :

$$\begin{aligned}\mathbf{S} &= \frac{1}{2} \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \\ &= \left(\frac{\kappa^2 I_0 a^2}{2r} \right)^2 \eta \cos^2[(\pi/4) \cos \theta] \sin^2 \theta \mathbf{a}_r\end{aligned}$$

b) La potencia radiada:

$$\begin{aligned}P_{rad} &= \oint_S \mathbf{S} \cdot d\mathbf{s} \\ &= \left(\frac{\kappa^2 I_0 a^2}{2} \right)^2 \eta \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \cos^2[(\pi/4) \cos \theta] \sin^2 \theta \mathbf{a}_r \cdot \sin \theta d\theta d\varphi \mathbf{a}_r \\ &= \left(\frac{\kappa^2 I_0 a^2}{\pi} \right)^2 \eta \frac{(\pi^3 + 24)}{3}\end{aligned}$$

4. A partir de \mathbf{N} podemos calcular $F(\theta)$, y con éste:

a) La Ganancia Directiva:

$$G_D(\theta) = \frac{4\pi F(\theta)^2}{\oint_{4\pi} F(\theta)^2, d\Omega}$$

y como $F(\theta)^2 = \cos^2[(\pi/4) \cos \theta] \sin^2 \theta$, tenemos:

$$\begin{aligned}G_D(\theta, \varphi) &= \frac{4\pi \cos^2[(\pi/4) \cos \theta] \sin^2 \theta}{\oint_{4\pi} \cos^2[(\pi/4) \cos \theta] \sin^2 \theta \sin \theta d\theta d\varphi} \\ &= \frac{3\pi^3}{\pi^3 + 24} \cos^2[(\pi/4) \cos \theta] \sin^2 \theta \\ &= 1,691 \cos^2[(\pi/4) \cos \theta] \sin^2 \theta\end{aligned}$$

b) Y la Directividad:

$$D = \text{máx}\{G_D\} \\ = 1,691$$

5. Finalmente los diagramas de radiación 2D $F(\theta, \pi/2)$ y $F(\pi/2, \varphi)$ se pueden trazar. En la Fig. 10.12 se muestran tales diagramas.

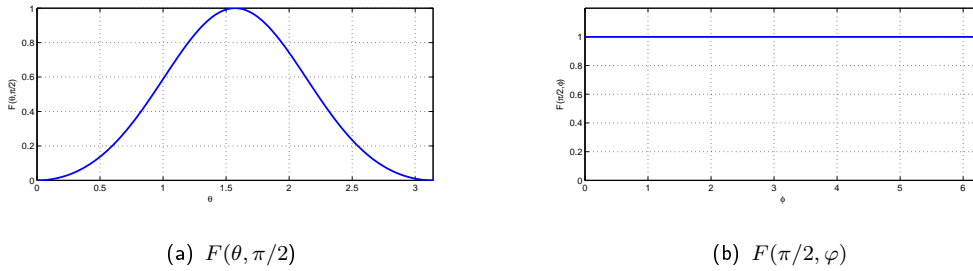


Figura 10.12: Diagramas Cartesianos de radiación.

10.4. Problemas

1. Una antena consiste de dos dipolos elementales de longitud $\lambda/60$, dispuestos ortogonalmente sobre los ejes x y z . La distribución de corrientes de la antena se define como:

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}') = I_0\delta(y')\delta(z')\mathbf{a}_x + I_0\delta(x')\delta(y')\mathbf{a}_z \quad [\text{A/m}^2] \quad (10.60)$$

Se desea calcular (todo referido a la zona lejana):

- a) $\mathbf{N}(\theta, \varphi)$, \mathbf{E} y \mathbf{H} .
 - b) $F(\theta, \varphi)$, $F_\theta(\theta, \varphi)$ y $F_\varphi(\theta, \varphi)$.
 - c) Trazar los diagramas de radiación polar y Cartesiano $F_\theta(\theta, \pi/2)$, $F_\theta(\pi/2, \varphi)$, $F_\varphi(\theta, 0)$ y $F_\varphi(\theta, \pi/2)$.
 - d) Comprobar que para todas las direcciones la polarización de la antena es lineal, y especificar, además, dos direcciones (θ, φ) en las cuales la polarización sea vertical y horizontal, respectivamente.
2. Una antena consiste de dos dipolos elementales de longitud $\lambda/60$, dispuestos ortogonalmente sobre los ejes x y z . La distribución de corrientes de la antena

se define como:

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}') = I_0 e^{j\alpha} \delta(y') \delta(z') \mathbf{a}_x + I_0 \delta(x') \delta(y') \mathbf{a}_z \quad [\text{A/m}^2] \quad (10.61)$$

Calcular:

- a) $\mathbf{N}(\theta, \varphi)$, \mathbf{E} y \mathbf{H} . Compare el resultado con el del punto 1)(a) y comente.
- b) Calcule el vector de polarización.
- c) Evalúe el campo en la dirección $\theta = \pi/2$ y $\varphi = 0$ y especifique la polarización en dicha dirección.
- d) Evalúe el campo eléctrico y la densidad de potencia a 1 Km de distancia en la dirección $\theta = \pi/2$ y $\varphi = \pi/2$ y especifique la polarización en dicha dirección.
- e) Sobre una porción de superficie esférica alrededor de la dirección $\theta = \pi/2$ y $\varphi = \pi/2$, tomando en cuenta que el ángulo sólido subtendido por ella es muy pequeño (superficie \approx plana), estudie las diferentes opciones para el valor del ángulo α con el propósito de obtener diferentes tipos de polarización: circular y elíptica, derecha e izquierda, y lineal.

Capítulo 11

Ondas Guías

Introducción

UNA guía de onda está hecha de uno o más materiales de propiedades electromagnéticas intrínsecas diferentes y consiste, en general, en una estructura con gran desarrollo longitudinal y una sección transversal uniforme. En la Figura 11.1 se muestran algunos tipos de guías de ondas.

Una guía de onda puede tener la forma de una cañería, hecha de material conductor, rellena de aire, o vacía, como es el caso de una guía de onda rectangular –ver Fig. 11.1(a)–, o de una guía de onda circular; o podría consistir en dos regiones cilíndricas concéntricas hechas de materiales dieléctricos con distintos índices de refracción, como es el caso de la fibra óptica –ver Fig. 11.1(d)–; o de un par de conductores cilíndricos formando lo que se conoce como una línea bifilar. Existen otras estructuras de guiado, como el cable coaxial –Fig. 11.1(b)–, la microcinta –Fig. 11.1(c)–, etc.

Normalmente se puede asumir que los campos se propagan en el interior de la guía¹ en la dirección longitudinal, mediante múltiples reflexiones en la superficie de separación de los materiales que conforman la estructura. Esto es intuitivamente cierto cuando uno cualquiera de los campos presenta una componente longitudinal (modos TE y TM), pero resulta muy difícil admitirlo cuando los campos son completamente transversales (modo TEM).

Si hacemos caso omiso de las fuentes impresas que pudieran excitar los campos dentro de la guía, lo cual se logra imponiendo la inexistencia de tales fuentes, los campos en la guía se pueden considerar libres, pero confinados, y su estructura es-

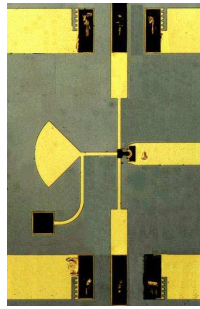
¹Se entiende por interior de la guía la región ocupada por el material interno



(a) Guía de onda rectangular (tomado de <http://www.quinstar.com>).



(b) Cable coaxial (tomado de <http://www.cybermarket.co.uk>).



(c) Microcinta (tomado de <http://www.eecs.umich.edu>).



(d) Fibra óptica (tomado de <http://www.drakausa.com>).

Figura 11.1: Ejemplos de guías de onda.

taría determinada por la solución de tantas ecuaciones homogéneas de HELMHOLTZ como materiales distintos formen parte de la guía y de la conciliación de tales soluciones con las condiciones de borde que las Ecuaciones de MAXWELL imponen en todas las interfaces entre dichos materiales dentro de la guía.

Cuadro 11.1: Clasificación de las ondas guiadas

TEM	TE	TM
$e_z, h_z = 0$	$h_z = 0$	$e_z = 0$

En este documento nos ocuparemos del estudio de las guías de onda constituidas por uno o dos conductores y rellenas de un dieléctrico homogéneo.

En una guía de onda arbitraria,

todos los campos que tienen alguna posibilidad de propagarse (en la dirección longitudinal) presentan, en general, una estructura que resulta de cierta combinación lineal de tres familias distintas de estructuras posibles. Estas estructuras se denominan –ver Cuadro 11.1–:

- TEM: ondas *transverse electromagnetic*: los campos eléctrico y magnético son ambos transversales a la dirección de propagación.
- TE o H: ondas (modos) *transverse electric*: el campo eléctrico es transversal a la dirección de propagación.
- TM o E: ondas (modos) *transverse magnetic*: el campo magnético es transversal a la dirección de propagación.

Para analizar estas soluciones (estructuras) partiremos de una guía de onda ideal, esto es: hecha con conductores ideales ($\sigma \rightarrow \infty$) y rellena con un dieléctrico perfecto ($\epsilon'' = 0$). El problema que así resulta se reduce a resolver un problema con valores en la frontera en una sola región: en el dieléctrico, el cual se asume delimitado, como se ha indicado anteriormente, por uno o más conductores perfectos.

11.0.1. Planteamiento del problema ideal

Dadas las ecuaciones de HELMHOLTZ para los campos \mathbf{E} y \mathbf{H} en el dieléctrico que rellena la guía:

$$\nabla^2 \mathbf{E} + \kappa^2 \mathbf{E} = 0 \quad (11.1)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} + \kappa^2 \mathbf{H} = 0 \quad (11.2)$$

Pondremos el operador de HELMHOLTZ en la forma:

$$\nabla^2 + \kappa^2 \quad (11.3)$$

$$\Downarrow \quad (11.4)$$

$$\underbrace{\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}}_{\nabla_T^2} + \kappa^2 \quad (11.5)$$

$$\Downarrow \quad (11.6)$$

$$\nabla_T^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \kappa^2 \quad (11.7)$$

Descompondremos el campo eléctrico en sus componentes transversales y longitudinales, y asumiremos que la dependencia de estas componentes respecto de las coordenadas transversales (x y y) y longitudinal (z) es separable:

$$\mathbf{E} = \underbrace{\mathbf{E}_T(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z)}_{\mathbf{e}_T(\mathbf{x}, \mathbf{y})g(z)} + \underbrace{E_z(x, y, z)}_{e_z(x, y)g(z)} \mathbf{a}_z \quad (11.8)$$

$$\Downarrow \quad (11.9)$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_T(x, y)g(z) + e_z(x, y)g(z)\mathbf{a}_z \quad (11.10)$$

Haremos lo propio con el campo magnético:

$$\mathbf{H} = \underbrace{\mathbf{H}_T(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z)}_{\mathbf{h}_T(\mathbf{x}, \mathbf{y})g(z)} + \underbrace{H_z(x, y, z)}_{h_z(x, y)g(z)} \mathbf{a}_z \quad (11.11)$$

$$\Downarrow \quad (11.12)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{h}_T(x, y)g(z) + h_z(x, y)g(z)\mathbf{a}_z \quad (11.13)$$

Al aplicar el operador 11.7 a los campos 11.10 y 11.13, las ecuaciones vectoriales 11.1 y 11.2 dan lugar a las ecuaciones del cuadro 11.2.

Cuadro 11.2: Ecuaciones de HELMHOLTZ.

Campo eléctrico	Campo magnético
$\left(\nabla_T^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \kappa^2\right) \mathbf{e}_T(x, y)g(z) = 0$	$\left(\nabla_T^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \kappa^2\right) \mathbf{h}_T(x, y)g(z) = 0$
$\left(\nabla_T^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \kappa^2\right) e_z(x, y)g(z) = 0$	$\left(\nabla_T^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \kappa^2\right) h_z(x, y)g(z) = 0$

La ecuación

$$\left(\nabla_T^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \kappa^2\right) f(x, y)g(z) = 0 \quad (11.14)$$

se separa en dos ecuaciones:

$$g(z)\nabla_T^2 f(x, y) + f(x, y)\frac{d^2}{dz^2}g(z) + \kappa^2 f(x, y)g(z) = 0 \quad (11.15)$$

$$\Downarrow \quad (11.16)$$

$$\frac{\nabla_T^2 f(x, y)}{f(x, y)} = -\kappa_T^2 \quad (11.17)$$

$$\frac{1}{g(z)}\frac{d^2}{dz^2}g(z) = -\kappa_\ell^2 \quad (11.18)$$

$$\Downarrow \quad (11.19)$$

$$\kappa_T^2 + \kappa_\ell^2 = \kappa^2 \quad (11.20)$$

$$\Downarrow \quad (11.21)$$

$$\nabla_T^2 f(x, y) + \kappa_T^2 f(x, y) = 0 \quad (11.22)$$

$$\frac{d^2}{dz^2}g(z) + \kappa_\ell^2 g(z) = 0 \quad (11.23)$$

La solución de la ecuación 11.23 es:

$$g(z) = Ae^{-j\kappa_\ell z} + Be^{j\kappa_\ell z} \quad (11.24)$$

con A y B constantes complejas indeterminadas.

La solución 11.24 está compuesta por dos ondas viajeras: una en el sentido de crecimiento de la coordenada longitudinal z , $Ae^{-j\kappa_\ell z}$, y la otra en sentido contrario, $Be^{j\kappa_\ell z}$. Nos quedaremos con la onda viajera progresiva $e^{-j\kappa_\ell z}$ e incluiremos la constante indeterminada A en la función $f(x, y)$, por lo que escribiremos $g(z) = e^{-j\kappa_\ell z}$. De esta forma las ecuaciones del cuadro 11.2 dan lugar a las ecuaciones del cuadro 11.3.

Dadas las ecuaciones de MAXWELL, para un medio simple libre de fuentes:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H} \quad (11.25)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\varepsilon\mathbf{E} \quad (11.26)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \quad (11.27)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (11.28)$$

Descomponemos los operadores $\nabla \times$ y $\nabla \cdot$ de la forma:

$$\nabla \times \equiv \left(\nabla_T + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{a}_z \right) \times$$

$$\nabla \cdot \equiv \left(\nabla_T + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{a}_z \right) \cdot$$

Cuadro 11.3: Resumen de las Ecuaciones resultantes

Campo eléctrico	Campo magnético
$\left(\nabla_T^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \kappa^2\right) \mathbf{e}_T(x, y)e^{-j\kappa_\ell z} = 0$	$\left(\nabla_T^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \kappa^2\right) \mathbf{h}_T(x, y)e^{-j\kappa_\ell z} = 0$
$\left(\nabla_T^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \kappa^2\right) e_z(x, y)e^{-j\kappa_\ell z} = 0$	$\left(\nabla_T^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \kappa^2\right) h_z(x, y)e^{-j\kappa_\ell z} = 0$
\Downarrow	
$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \equiv (-j\kappa_\ell)^2; \quad \kappa^2 - \kappa_\ell^2 = \kappa_T^2$	
\Downarrow	
$\nabla_T^2 \mathbf{e}_T(x, y) + \kappa_T^2 \mathbf{e}_T(x, y) = 0$	$\nabla_T^2 \mathbf{h}_T(x, y) + \kappa_T^2 \mathbf{h}_T(x, y) = 0$
$\nabla_T^2 e_z(x, y) + \kappa_T^2 e_z(x, y) = 0$	$\nabla_T^2 h_z(x, y) + \kappa_T^2 h_z(x, y) = 0$

donde

$$\nabla_T \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{a}_y \right)$$

Sustituyendo las expresiones de los campos \mathbf{E} y \mathbf{H} de las ecuaciones 11.10 y 11.13, respectivamente, y poniendo $g(z) = e^{-j\kappa_\ell z}$ obtenemos:

$$\begin{aligned} \left(\nabla_T + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{a}_z \right) \times \left[\mathbf{e}_T(x, y)e^{-j\kappa_\ell z} + e_z(x, y)e^{-j\kappa_\ell z} \mathbf{a}_z \right] \\ = -j\omega\mu \left[\mathbf{h}_T(x, y)e^{-j\kappa_\ell z} + h_z(x, y)e^{-j\kappa_\ell z} \mathbf{a}_z \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\nabla_T + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{a}_z \right) \times \left[\mathbf{h}_T(x, y)e^{-j\kappa_\ell z} + h_z(x, y)e^{-j\kappa_\ell z} \mathbf{a}_z \right] \\ = j\omega\varepsilon \left[\mathbf{e}_T(x, y)e^{-j\kappa_\ell z} + e_z(x, y)e^{-j\kappa_\ell z} \mathbf{a}_z \right] \end{aligned}$$

$$\left(\nabla_T + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{a}_z\right) \cdot \left[\mathbf{e}_T(x, y)e^{-j\kappa_\ell z} + e_z(x, y)e^{-j\kappa_\ell z}\mathbf{a}_z\right] = 0 \quad (11.29)$$

$$\left(\nabla_T + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{a}_z\right) \cdot \left[\mathbf{h}_T(x, y)e^{-j\kappa_\ell z} + h_z(x, y)e^{-j\kappa_\ell z}\mathbf{a}_z\right] = 0 \quad (11.30)$$

Para el campo eléctrico escribiremos:

$$\nabla_T \times \mathbf{e}_T(x, y) = -j\omega\mu h_z(x, y)\mathbf{a}_z \quad (11.31)$$

$$\nabla_T \times e_z(x, y)\mathbf{a}_z - j\kappa_\ell\mathbf{a}_z \times \mathbf{e}_T(x, y) = -j\omega\mu\mathbf{h}_T(x, y) \quad (11.32)$$

$$\nabla_T \cdot \mathbf{e}_T(x, y) = j\kappa_\ell e_z(x, y) \quad (11.33)$$

Usando la identidad vectorial:

$$\nabla \times (\psi\mathbf{A}) = (\nabla\psi) \times \mathbf{A} + \psi\nabla \times \mathbf{A}$$

se podrá escribir:

$$\nabla_T \times e_z(x, y)\mathbf{a}_z = \nabla_T e_z(x, y) \times \mathbf{a}_z$$

ya que $\nabla_T \times \mathbf{a}_z = 0$. Reescribiremos la ecuación 11.32 de la forma:

$$\mathbf{a}_z \times \nabla_T e_z(x, y) + j\kappa_\ell\mathbf{a}_z \times \mathbf{e}_T(x, y) = j\omega\mu\mathbf{h}_T(x, y) \quad (11.34)$$

Y para el campo magnético:

$$\nabla_T \times \mathbf{h}_T(x, y) = j\omega\epsilon e_z(x, y)\mathbf{a}_z \quad (11.35)$$

$$\mathbf{a}_z \times \nabla_T h_z(x, y) + j\kappa_\ell\mathbf{a}_z \times \mathbf{h}_T(x, y) = -j\omega\epsilon\mathbf{e}_T(x, y) \quad (11.36)$$

$$\nabla_T \cdot \mathbf{h}_T(x, y) = j\kappa_\ell h_z(x, y) \quad (11.37)$$

11.1. Clasificación de las soluciones

11.1.1. Ondas TEM

Para las ondas TEM se cumple que $e_z = 0$ y $h_z = 0$. Al sustituir en las ecuaciones de MAXWELL estos valores se obtiene:

- Ecuaciones para el campo eléctrico:

$$\nabla_T \times \mathbf{e}_T(x, y) = 0 \quad (11.38)$$

$$\kappa_\ell\mathbf{a}_z \times \mathbf{e}_T(x, y) = \omega\mu\mathbf{h}_T(x, y) \quad (11.39)$$

$$\nabla_T \cdot \mathbf{e}_T(x, y) = 0 \quad (11.40)$$

- Ecuaciones para el campo magnético:

$$\nabla_T \times \mathbf{h}_T(x, y) = 0 \quad (11.41)$$

$$\kappa_\ell \mathbf{a}_z \times \mathbf{h}_T(x, y) = -\omega \varepsilon \mathbf{e}_T(x, y) \quad (11.42)$$

$$\nabla_T \cdot \mathbf{h}_T(x, y) = 0 \quad (11.43)$$

Solución

$$\nabla_T \times \mathbf{e}_T(x, y) = 0 \Rightarrow \mathbf{e}_T(x, y) = -\nabla \Phi(x, y) \quad (11.44)$$

$$\Downarrow \quad (11.45)$$

$$\left. \begin{array}{l} \nabla_T^2 \Phi(x, y) = 0 \\ \Phi|_{S_1, S_2} \end{array} \right\} \quad (11.46)$$

$$\kappa_\ell = \kappa \quad (11.47)$$

$$\Downarrow \quad (11.48)$$

$$\mathbf{E} = -\nabla_T \Phi(x, y) e^{-j\kappa z} \quad (11.49)$$

$$\mathbf{H} = \pm \frac{\kappa}{\omega \mu} \mathbf{a}_z \times \mathbf{e}_T(x, y) e^{-j\kappa z} \quad (11.50)$$

$\kappa_\ell = \kappa$ ya que $\mathbf{E} = \mathbf{e}_T e^{-j\kappa_\ell z}$ debe satisfacer la ecuación (11.1):

$$\nabla^2 \mathbf{e}_T e^{-j\kappa_\ell z} + \kappa^2 \mathbf{e}_T e^{-j\kappa_\ell z} = 0$$

$$\left[\nabla_T^2 - \kappa_\ell^2 \right] \mathbf{e}_T e^{-j\kappa_\ell z} + \kappa^2 \mathbf{e}_T e^{-j\kappa_\ell z} = 0$$

11.1.2. Ondas TE o H

Para las ondas TE o H se cumple que $e_z = 0$. Al sustituir en las ecuaciones de MAXWELL este valor se obtiene:

- Ecuaciones para el campo eléctrico:

$$\nabla_T \times \mathbf{e}_T(x, y) = -j\omega \mu h_z(x, y) \mathbf{a}_z \quad (11.51)$$

$$\kappa_\ell \mathbf{a}_z \times \mathbf{e}_T(x, y) = \omega \mu \mathbf{h}_T(x, y) \quad (11.52)$$

$$\nabla_T \cdot \mathbf{e}_T(x, y) = 0 \quad (11.53)$$

- Ecuaciones para el campo magnético:

$$\nabla_T \times \mathbf{h}_T(x, y) = 0 \quad (11.54)$$

$$\mathbf{a}_z \times \nabla_T h_z(x, y) + j\kappa_\ell \mathbf{a}_z \times \mathbf{h}_T(x, y) = -j\omega \varepsilon \mathbf{e}_T(x, y) \quad (11.55)$$

$$\nabla_T \cdot \mathbf{h}_T(x, y) = j\kappa_\ell h_z(x, y) \quad (11.56)$$

Solución

1. Se resuelve la ecuación de HELMHOLTZ:

$$\nabla_T^2 h_z(x, y) + \kappa_T^2 h_z(x, y) = 0 \quad (11.57)$$

que junto con la condiciones $E_t = 0$ y $H_n = 0$ sobre la superficie conductora, con $E_t = \mathbf{e}_T \cdot \mathbf{a}_t$ y $H_n = \mathbf{h}_t \cdot \mathbf{a}_n$, donde \mathbf{a}_t y \mathbf{a}_n son dos vectores unitarios, el primero tangente a la superficie conductora y contenido en el plano transversal, y el segundo normal a la superficie conductora, tal que $\mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_t = \mathbf{a}_n$:

$$(\mathbf{a}_z \times \nabla_T h_z + j\kappa_\ell \mathbf{a}_z \times \mathbf{h}_T = -j\omega \varepsilon \mathbf{e}_T) \cdot \mathbf{a}_t \text{ -ecuación 11.55-} \quad (11.58)$$

$$\Downarrow \quad (11.59)$$

$$\nabla_T h_z \times \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_t + j\kappa_\ell \mathbf{h}_T \times \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_t = 0 \quad (11.60)$$

ya que $\mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C}$

$$\nabla_T h_z \cdot \mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_t + j\kappa_\ell \mathbf{h}_T \cdot \mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_t = 0 \quad (11.61)$$

$$\Downarrow \quad (11.62)$$

$$\nabla_T h_z \cdot \mathbf{a}_n + j\kappa_\ell \mathbf{h}_T \cdot \mathbf{a}_n = 0 \quad (11.63)$$

$$\Downarrow \quad (11.64)$$

$$\frac{\partial h_z}{\partial n} = 0 \quad (11.65)$$

da lugar al denominado *segundo problema de contorno* para la ecuación de HELMHOLTZ:

$$\left. \begin{aligned} \nabla_T^2 h_z + \kappa_T^2 h_z &= 0 \\ \frac{\partial h_z}{\partial n} &= 0 \text{ en } S_T \end{aligned} \right\} \quad (11.66)$$

El problema de contorno 11.66 es un **problema de autovalores**, donde κ_T , con $\kappa_T \in \{\kappa_{Tn}\}$, es un **autovalor** del operador ∇_T^2 , $\{\kappa_{Tn}\}$ es el **espectro** de ∇_T^2 , y la solución h_z es la **autofunción** asociada, con $h_z \in \{h_{zn}\}$. Cada solución h_z del conjunto $\{h_{zn}\}$ da lugar a una estructura transversal de los campos \mathbf{E} y \mathbf{H} distinta, denominada modo de propagación. El conjunto $\{h_{zn}\}$ contiene todos los modos de propagación: las autofunciones.

2. Se calcula $\mathbf{h}_t(x, y)$ a partir de $h_z(x, y)$:

$$\nabla_T \times \mathbf{h}_T(x, y) = 0 \text{ --ecuación 11.54--} \quad (11.67)$$

$$\Downarrow \quad (11.68)$$

$$\nabla_T \times \nabla_T \times \mathbf{h}_T(x, y) \equiv \nabla_T \left[\underbrace{\nabla_T \cdot \mathbf{h}_T(x, y)}_{\text{de la ecuación 11,56}} \right] - \underbrace{\nabla_T^2 \mathbf{h}_T(x, y)}_{\text{del cuadro 11.3}} = 0 \quad (11.69)$$

$$\Downarrow \quad (11.70)$$

$$\nabla_T [j\kappa_\ell h_z(x, y)] + \kappa_T^2 \mathbf{h}_T(x, y) = 0 \quad (11.71)$$

$$\Downarrow \quad (11.72)$$

$$\mathbf{h}_T(x, y) = -\frac{j\kappa_\ell}{\kappa_T^2} \nabla_T [h_z(x, y)] \quad (11.73)$$

3. Se calcula $\mathbf{e}_T(x, y)$ a partir de $\mathbf{h}_T(x, y)$, usando la propiedad $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$:

$$\kappa_\ell \mathbf{a}_z \times \mathbf{e}_T(x, y) = \omega\mu \mathbf{h}_T(x, y) \text{ --ecuación 11.52--} \quad (11.74)$$

$$\Downarrow \quad (11.75)$$

$$\kappa_\ell \mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_z \times \mathbf{e}_T(x, y) = \omega\mu \mathbf{a}_z \times \mathbf{h}_T(x, y) \quad (11.76)$$

$$\Downarrow \quad (11.77)$$

$$\mathbf{e}_T(x, y) = -\frac{\omega\mu}{\kappa_\ell} \mathbf{a}_z \times \mathbf{h}_T(x, y) \quad (11.78)$$

Se define la impedancia de onda para el modo TE:

$$\eta_{TE} = \frac{e_T}{h_T} = \frac{\omega\mu}{\kappa_\ell} = \frac{\kappa}{\kappa_\ell} \eta$$

11.1.3. Ondas TM o E

Para las ondas TM o E se cumple que $h_z = 0$. Al sustituir en las ecuaciones de MAXWELL este valor se obtiene:

- Ecuaciones para el campo eléctrico:

$$\nabla_T \times \mathbf{e}_T(x, y) = 0 \quad (11.79)$$

$$\mathbf{a}_z \times \nabla_T e_z(x, y) + j\kappa_\ell \mathbf{a}_z \times \mathbf{e}_T(x, y) = j\omega\mu \mathbf{h}_T(x, y) \quad (11.80)$$

$$\nabla_T \cdot \mathbf{e}_T(x, y) = j\kappa_\ell e_z(x, y) \quad (11.81)$$

Cuadro 11.4: Resumen del procedimiento de cálculo de los campos para las ondas TE.

$\nabla_T^2 h_z + \kappa_T^2 h_z = 0$ $\frac{\partial h_z}{\partial n} = 0 \text{ en } S_T$
$h_z = h_z(x, y), h_z \in \{h_{zn}\}, \kappa_T \in \{\kappa_{Tn}\}$
$\mathbf{h}_T = -\frac{j\kappa_\ell}{\kappa_T^2} \nabla_T h_z$ $\mathbf{e}_T = -\eta_{TE} \mathbf{a}_z \times \mathbf{h}_T$

- Ecuaciones para el campo magnético:

$$\nabla_T \times \mathbf{h}_T(x, y) = j\omega\epsilon e_z(x, y) \mathbf{a}_z \quad (11.82)$$

$$\kappa_\ell \mathbf{a}_z \times \mathbf{h}_T(x, y) = -\omega\epsilon \mathbf{e}_T(x, y) \quad (11.83)$$

$$\nabla_T \cdot \mathbf{h}_T(x, y) = 0 \quad (11.84)$$

11.1.4. Solución

1. Se resuelve la ecuación de HELMHOLTZ:

$$\nabla_T^2 e_z(x, y) + \kappa_T^2 e_z(x, y) = 0 \quad (11.85)$$

que junto con la condición $e_z = 0$ sobre la superficie conductora, da lugar al denominado *primer problema de contorno* para la ecuación de HELMHOLTZ:

$$\left. \begin{array}{l} \nabla_T^2 e_z + \kappa_T^2 e_z = 0 \\ e_z = 0 \text{ en } S_T \end{array} \right\} \quad (11.86)$$

2. Se calcula $\mathbf{e}_t(x, y)$ a partir de $e_z(x, y)$:

$$\nabla_T \times \mathbf{e}_T(x, y) = 0 \text{ --ecuación 11.79--} \quad (11.87)$$

$$\Downarrow \quad (11.88)$$

$$\nabla_T \times \nabla_T \times \mathbf{e}_T(x, y) \equiv \nabla_T \left[\underbrace{\nabla_T \cdot \mathbf{e}_T(x, y)}_{\text{de la ecuación 11,81}} \right] - \underbrace{\nabla_T^2 \mathbf{e}_T(x, y)}_{\text{del cuadro 11.3}} = 0 \quad (11.89)$$

$$\Downarrow \quad (11.90)$$

$$\nabla_T [j\kappa_\ell e_z(x, y)] + \kappa_T^2 \mathbf{e}_T(x, y) = 0 \quad (11.91)$$

$$\Downarrow \quad (11.92)$$

$$\mathbf{e}_T(x, y) = -\frac{j\kappa_\ell}{\kappa_T^2} \nabla_T [e_z(x, y)] \quad (11.93)$$

3. Se calcula $\mathbf{h}_T(x, y)$ a partir de $\mathbf{e}_T(x, y)$: Usando la propiedad $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$:

$$\kappa_\ell \mathbf{a}_z \times \mathbf{h}_T(x, y) = -\omega \varepsilon \mathbf{e}_T(x, y) \text{ --ecuación 11.83--} \quad (11.94)$$

$$\Downarrow \quad (11.95)$$

$$\kappa_\ell \mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_z \times \mathbf{h}_T(x, y) = -\omega \varepsilon \mathbf{a}_z \times \mathbf{e}_T(x, y) \quad (11.96)$$

$$\Downarrow \quad (11.97)$$

$$\mathbf{h}_T(x, y) = \frac{\omega \varepsilon}{\kappa_\ell} \mathbf{a}_z \times \mathbf{e}_T(x, y) \quad (11.98)$$

Se define la impedancia de onda para el modo TM:

$$\eta_{TM} = \frac{e_T}{h_T} = \frac{\kappa_\ell}{\omega \varepsilon} = \frac{\kappa_\ell}{\kappa} \eta$$

11.1.5. Estimación de la solución del problema real

En una situación real, ni el dieléctrico ni el conductor son perfectos. El dieléctrico presentará pérdidas por polarización ($\varepsilon'' \neq 0$), por lo que parte de la energía transportada por los campos se disipará en forma de calor en el propio dieléctrico. Además, otra fracción de la mencionada energía transportada por los campos, aún cuando muy pequeña, se refractará en el conductor disipándose en él mediante el efecto Joule. Si estas pérdidas se mantienen pequeñas, es posible *estimar* la solución del problema real mediante una pequeña perturbación² de la solución del problema ideal:

²¿Vale la redundancia?

Cuadro 11.5: Resumen del procedimiento de cálculo de los campos para las ondas TM.

$\nabla_T^2 e_z + \kappa_T^2 e_z = 0$ $e_z = 0 \text{ en } S_T$
$e_z = e_z(x, y), e_z \in \{e_{zn}\}, \kappa_T \in \{\kappa_{Tn}\}$
$\mathbf{e}_T = -\frac{jk_\ell}{\kappa_T^2} \nabla_T e_z$ $\mathbf{h}_T = \frac{1}{\eta_{TM}} \mathbf{a}_z \times \mathbf{e}_T$

$$\mathbf{E} = \underbrace{(\mathbf{e}_T + e_z \mathbf{a}_z) e^{-jk_\ell z}}_{\text{solución ideal}} \rightarrow \widetilde{\mathbf{E}} = \underbrace{(\mathbf{e}_T + e_z \mathbf{a}_z) e^{-(jk_\ell z + \alpha z)}}_{\text{solución ideal perturbada}} \quad (11.99)$$

$$\mathbf{H} = \underbrace{(\mathbf{h}_T + h_z \mathbf{a}_z) e^{-jk_\ell z}}_{\text{solución ideal}} \rightarrow \widetilde{\mathbf{H}} = \underbrace{(\mathbf{h}_T + h_z \mathbf{a}_z) e^{-(jk_\ell z + \alpha z)}}_{\text{solución ideal perturbada}} \quad (11.100)$$

donde α es la perturbación, la cual se refleja en forma de una atenuación en la expresión de los campos.

El cálculo de α , curiosamente, se puede realizar utilizando las soluciones de los campos del problema ideal bajo la premisa, ya mencionada, de que las imperfecciones en los materiales causen pérdidas muy pequeñas. Este método es referido en la literatura científica como el método de las perturbaciones [30].

11.1.6. Atenuación

Aplicaremos el método de las perturbaciones para calcular la atenuación (la perturbación) haciendo uso de la solución del problema ideal³. Para ello observamos

³Esto es: en las ecuaciones utilizadas todas las expresiones de los campos eléctrico y magnético se refieren a la solución ideal, a menos que se indique explícitamente lo contrario.

que la potencia que se propaga a los largo de la guía responde a una ley del tipo:

$$\begin{aligned}
P &= \int_{S_T} \Re \left\{ \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*}{2} \right\} \cdot d\mathbf{s} \\
&= \int_{S_T} \Re \left\{ \frac{(\mathbf{e}_T + e_z \mathbf{a}_z) e^{-(j\kappa_\ell z + \alpha z)} \times (\mathbf{h}_T^* + h_z^* \mathbf{a}_z) e^{j\kappa_\ell z - \alpha z}}{2} \right\} \cdot d\mathbf{s} \\
&= \int_{S_T} \underbrace{\Re \left\{ \frac{\mathbf{e}_T \times \mathbf{h}_T^*}{2} \right\} \cdot d\mathbf{s}}_{P_0} e^{-2\alpha z} \\
&= P_0 e^{-2\alpha z}
\end{aligned} \tag{11.101}$$

donde S_T es la superficie transversal del dieléctrico y P_0 es la potencia que sería transportada por los campos en el caso ideal (ausencia de pérdidas) y que equivale, en el caso real, a la potencia transportada por los campos en $z = 0$.

Dado que la onda electromagnética progresiva ha de experimentar una variación de potencia ΔP en una longitud ΔZ de la guía que se debe corresponder con la misma cantidad de potencia disipada tanto en el dieléctrico como en el conductor por unidad de longitud, P_ℓ , tomando en cuenta la ecuación (11.101), se podrá escribir:

$$\begin{aligned}
P_\ell &= - \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta z} \\
&= - \frac{dP}{dz} \\
&= 2\alpha P
\end{aligned} \tag{11.102}$$

la cual implica que las pérdidas por unidad de longitud en un plano transversal dado de la guía es directamente proporcional a la potencia transportada por los campos en el mismo plano. De la ecuación (11.114) es posible despejar α :

$$\alpha = \frac{P_\ell}{2P} \tag{11.103}$$

Por razones de linealidad, α se puede descomponer en una suma de dos partes: una, α_D , que modela las pérdidas en el dieléctrico y otra, α_C , que modela las pérdidas en el conductor: $\alpha = \alpha_D + \alpha_C$. Para el cálculo de estas atenuaciones partiremos de la parte real de la ecuación de balance energético complejo:

$$\oint_S \Re \left\{ \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*}{2} \right\} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{\omega}{2} \int_{V(S)} (\mu'' \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^* + \varepsilon'' \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*) d\nu - \frac{1}{2} \int_{V(S)} \sigma \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* d\nu \tag{11.104}$$

la cual aplicaremos a una región volumétrica de la guía definida por S_T y una longitud incremental Δz –ver figura 11.2(a)–, suponiendo que el dieléctrico no exhibe pérdidas ni magnéticas ni óhmicas:

$$\oint_S \Re \left\{ \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*}{2} \right\} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{\omega}{2} \int_{V(S)} \varepsilon'' \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* d\nu \quad (11.105)$$

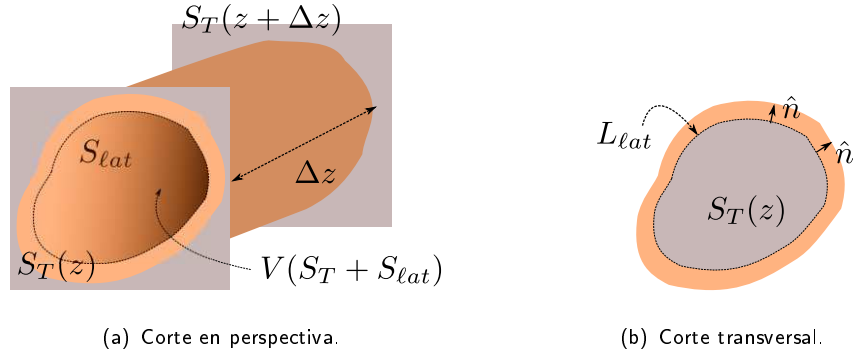


Figura 11.2: Tramo de guía de onda de longitud Δz .

La integral del miembro de la derecha se divide en dos partes al considerar que la superficie de integración está compuesta por una superficie S_T transversal, a través de la cual fluye la energía transportada por los campos a lo largo de la guía, y una superficie lateral S_{lat} –ver figura 11.2(a)–, la cual coincide con la superficie interior de los conductores, a través de la cual fluye la energía que se refracta en estos y que se disipa por efecto Joule:

$$\oint_S \Re \left\{ \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*}{2} \right\} \cdot d\mathbf{s} = \int_{S_T(z)+S_T(z+\Delta z)} \Re \left\{ \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*}{2} \right\} \cdot d\mathbf{s} + \int_{S_{lat}} \Re \left\{ \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*}{2} \right\} \cdot d\mathbf{s} \quad (11.106)$$

que al sustituir en la ecuación (11.105), y luego de despejar apropiadamente, nos permite obtener:

$$\begin{aligned} \int_{S_T(z)+S_T(z+\Delta z)} \Re \left\{ \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*}{2} \right\} \cdot d\mathbf{s} &= - \int_{S_{lat}} \Re \left\{ \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*}{2} \right\} \cdot d\mathbf{s} - \frac{\omega}{2} \int_{V(S_T+S_{lat})} \varepsilon'' \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* d\nu \\ \Delta P &= - \underbrace{\int_{S_{lat}} \Re \left\{ \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*}{2} \right\} \cdot d\mathbf{s}}_{P_C} - \underbrace{\frac{\omega}{2} \int_{V(S_T+S_{lat})} \varepsilon'' \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* d\nu}_{P_D} \end{aligned} \quad (11.107)$$

donde ΔP es la variación de la potencia electromagnética transportada por los campos en ΔZ metros de longitud, P_C es la potencia refractada hacia los conductores

que fluye desde el volumen considerado a través de la superficie lateral, y P_D es la potencia disipada en el interior del volumen considerado debido a las pérdidas de polarización del dieléctrico.

Para la aplicación de la fórmula (11.103) tal que:

$$\alpha_C = \frac{P_{\ell C}}{2P} \quad \alpha_D = \frac{P_{\ell D}}{2P} \quad (11.108)$$

es necesario definir $P_{\ell C}$ y $P_{\ell D}$ en función de P_C y P_D , respectivamente.

11.1.7. Cálculo de la atenuación α_C por pérdidas en el conductor

$$\begin{aligned} P_{\ell C} &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{P_C}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\int_{S_{\ell at}} \Re \left\{ \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*}{2} \right\} \cdot d\mathbf{s}}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\int_{L_{\ell at}} \oint \Re \left\{ \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*}{2} \right\} \cdot d\ell d\mathbf{a}_n}{\Delta z} \\ &= \oint_{L_{\ell at}} \Re \left\{ \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*}{2} \right\} \cdot d\ell \mathbf{a}_n \end{aligned} \quad (11.109)$$

donde \mathbf{a}_n es un vector unitario normal a la superficie lateral de la guía que apunta hacia el interior del conductor y $L_{\ell at}$ es el contorno lateral de los conductores en el plano transversal –ver figura 11.2(b)–.

En virtud de que el campo eléctrico ideal es nulo en el contorno lateral $L_{\ell at}$ la integral anterior –ecuación (11.109)– no nos sirve directamente para calcular $P_{\ell C}$. En un conductor real, el campo eléctrico tangencial a la superficie, aún cuando muy pequeño, no es nulo. Tendremos que calcular $P_{\ell C}$ utilizando los valores de los campos en el conductor (¿cómo?):

$$P_{\ell C} = \oint_{L_{\ell at}} \Re \left\{ \frac{\mathbf{E}_C \times \mathbf{H}_C^*}{2} \right\} \cdot d\ell \mathbf{a}_n \quad (11.110)$$

Aplicando las condiciones límites de LEONTÓVICH, podemos expresar el vector de POYNTING complejo en el conductor como un vector en la dirección de \mathbf{a}_n , de tal forma que:

$$S_0 \mathbf{a}_n = \frac{1}{2} \mathbf{E}_C \times \mathbf{H}_C^*$$

donde $\mathbf{E}_C = \mathbf{E}^+(0)e^{-j\kappa_C n}$ y $\mathbf{H}_C = \mathbf{H}^+(0)e^{-j\kappa_C n}$ son el campo eléctrico y magnético, respectivamente, en el conductor. Como $\mathbf{E}_C = \eta_C \mathbf{H}_C \times \mathbf{a}_n$, sigue que:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_C \times \mathbf{H}_C^* &= (\eta_C \mathbf{H}_C \times \mathbf{a}_n) \times \mathbf{H}_C^* \\ &= \eta_C (\mathbf{H}_C \cdot \mathbf{H}_C^*) \mathbf{a}_n \end{aligned} \quad (11.111)$$

sustituyendo la ecuación (11.111) en la ecuación (11.110), se obtiene:

$$\begin{aligned} P_{\ell C} &= \oint_{L_{\ell at}} \Re \left\{ \frac{\eta_C (\mathbf{H}_C \cdot \mathbf{H}_C^*) \mathbf{a}_n}{2} \right\} \cdot d\ell \mathbf{a}_n \\ &= \frac{\Re \{\eta_C\}}{2} \oint_{L_{\ell at}} \mathbf{H}_C \cdot \mathbf{H}_C^* d\ell \end{aligned} \quad (11.112)$$

y como $\mathbf{H}_C(\mathbf{0}) = \mathbf{H}(\mathbf{0})$, o sea: la componente tangencial del campo magnético en la superficie de separación entre un dieléctrico y un conductor real es continua:

$$P_{\ell C} = \frac{\Re \{\eta_C\}}{2} \oint_{L_{\ell at}} \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^* d\ell \quad (11.113)$$

Tomando en cuenta que

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} \int_{S_T} \Re \{ \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \} \cdot d\mathbf{s} \\ &= \Re \left\{ \frac{1}{2} \int_{S_T} (\eta_D \mathbf{H} \times \mathbf{a}_z) \times \mathbf{H}^* \right\} \cdot d\mathbf{s} \mathbf{a}_z \\ &= \frac{\eta_D}{2} \int_{S_T} \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^* d\mathbf{s} \end{aligned} \quad (11.114)$$

será:

$$\alpha_C = \frac{\Re \{\eta_C\} \oint_{L_{\ell at}} \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^* d\ell}{2\eta_D \int_{S_T} \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^* d\mathbf{s}} \quad (11.115)$$

11.1.8. Cálculo de la atenuación α_D por pérdidas en el dieléctrico

La potencia disipada en el dieléctrico por unidad de longitud vale:

$$\begin{aligned}
P_{lD} &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{P_D}{\Delta z} \\
&= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\frac{\omega}{2} \int_{V(S_T+S_{lat})} \varepsilon'' \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* dV}{\Delta z} \\
&= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\frac{\omega}{2} \int_{S_T} \int \varepsilon'' \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* ds dz}{\Delta z} \\
&= \frac{\omega \varepsilon''}{2} \int_{S_T} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* ds
\end{aligned} \tag{11.116}$$

de modo que:

$$\alpha_D = \frac{\omega \varepsilon'' \int_{S_T} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* ds}{2 \eta_D \int_{S_T} \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^* ds} \tag{11.117}$$

11.2. Resumen de fórmulas

11.3. Cable coaxial

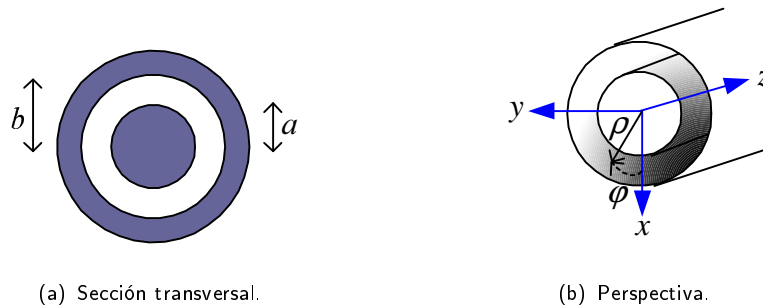


Figura 11.3: Cable coaxial. ■: conductor; □: dieléctrico.

Dado el cable coaxial que se ilustra en la figura 11.3, interiormente relleno de un dieléctrico ideal y hecho con conductores ideales, también, la estructura de los campos se puede obtener a partir de la solución del problema de contorno:

$$\left. \begin{aligned}
\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \rho \left(\frac{d\Phi}{d\rho} \right) &= 0 \\
\Phi(a) &= V_0, \quad \Phi(b) = 0
\end{aligned} \right\} \tag{11.118}$$

La solución de la ecuación (11.118) es:

$$\Phi(\rho) = A \ln \rho + B \tag{11.119}$$

Cuadro 11.6: Resumen del procedimiento de cálculo de los campos para cualquier modo.

TEM	TE	TM
$\nabla_T^2 \Phi = 0$ $\Phi _{S_{T1}, S_{T2}}$	$\nabla_T^2 h_z + \kappa_T^2 h_z = 0$ $\frac{\partial h_z}{\partial n} = 0$ en S_T	$\nabla_T^2 e_z + \kappa_T^2 e_z = 0$ $e_z = 0$ en S_T
$\kappa_\ell = \kappa$	$\eta_{TE} = \frac{\kappa}{\kappa_\ell} \eta$	$\eta_{TM} = \frac{\kappa_\ell}{\kappa} \eta$
$\mathbf{e}_T = -\nabla_T \Phi$ $\mathbf{h}_T = \mathbf{a}_z \times \frac{\mathbf{e}_T}{\eta}$	$\mathbf{h}_T = -\frac{j\kappa_\ell}{\kappa_T^2} \nabla_T h_z$ $\mathbf{e}_T = -\eta_{TE} \mathbf{a}_z \times \mathbf{h}_T$	$\mathbf{e}_T = -\frac{j\kappa_\ell}{\kappa_T^2} \nabla_T e_z$ $\mathbf{h}_T = \frac{1}{\eta_{TM}} \mathbf{a}_z \times \mathbf{e}_T$
Solución ideal		
$\mathbf{E} = (\mathbf{e}_T + e_z \mathbf{a}_z) e^{-j\kappa_\ell z}$ $\mathbf{H} = (\mathbf{h}_T + h_z \mathbf{a}_z) e^{-j\kappa_\ell z}$		
Solución real		
$\mathbf{E} = (\mathbf{e}_T + e_z \mathbf{a}_z) e^{-(j\kappa_\ell + \alpha)z}$ $\mathbf{H} = (\mathbf{h}_T + h_z \mathbf{a}_z) e^{-(j\kappa_\ell + \alpha)z}$		
$\alpha = \alpha_D + \alpha_C$	$\alpha_D = \frac{\omega \epsilon'' \int_{S_T} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* ds}{2 \int_{S_T} \Re \{ \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \} \cdot d\mathbf{s}}$	$\alpha_C = \frac{\Re \{ \eta_C \} \oint_{\Gamma_T} \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^* d\ell}{2 \int_{S_T} \Re \{ \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \} \cdot d\mathbf{s}}$

evaluando la solución (11.119) en los bordes se obtiene:

$$\begin{aligned} A \ln a + B &= V_0 \\ A \ln b + B &= 0 \end{aligned} \tag{11.120}$$

de donde

$$\begin{aligned} A &= \frac{V_0}{\ln(a/b)} \\ B &= -\frac{V_0 \ln b}{\ln(a/b)} \end{aligned} \quad (11.121)$$

de esta forma:

$$\Phi(\rho) = \frac{V_0}{\ln(b/a)} (\ln b - \ln \rho) \quad (11.122)$$

y

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_T &= -\nabla_T \Phi \\ &= -\frac{d\Phi}{d\rho} \mathbf{a}_\rho \\ &= \frac{V_0}{\ln(b/a)} \frac{\mathbf{a}_\rho}{\rho} \end{aligned} \quad (11.123)$$

sustituyendo esta solución en las ecuaciones (11.49) y (11.50) se obtiene:

$$\mathbf{E} = \frac{V_0}{\ln(b/a)} \frac{\mathbf{a}_\rho}{\rho} e^{-j\kappa z} \quad (11.124)$$

$$\mathbf{H} = \frac{V_0}{\ln(b/a)} \frac{1}{\eta} \frac{\mathbf{a}_\varphi}{\rho} e^{-j\kappa z} \quad (11.125)$$

11.3.1. Onda de voltaje

Podemos calcular la diferencia de potencial entre los conductores en el plano transversal $z = \text{cte}$. $-S_T(z)$:-

$$\begin{aligned} V &= -\int_-^+ \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} \\ &= -\left[\frac{V_0}{\ln(b/a)} \int_a^b \frac{\mathbf{a}_\rho}{\rho} \cdot d\rho \mathbf{a}_\rho \right] e^{-j\kappa z} \\ &= V_0 e^{-j\kappa z} \end{aligned} \quad (11.126)$$

y vemos como, existiendo una relación unívoca entre \mathbf{E} y V , es posible *hablar* de una onda de voltaje.

11.3.2. Onda de corriente

Podemos calcular la corriente enlazada por el campo magnético en el conductor interior (o exterior) en el plano transversal $S_T(z)$. Sea Γ un camino cerrado alrededor

del conductor interno del cable coaxial:

$$\begin{aligned}
 I &= \oint_{\Gamma} \mathbf{H} \cdot d\boldsymbol{\ell} \\
 &= \left[\frac{V_0}{\ln(b/a)\eta} \int_0^{2\pi} \frac{\mathbf{a}_\varphi}{\rho} \cdot \rho d\varphi \mathbf{a}_\varphi \right] e^{-j\kappa z} \\
 &= I_0 e^{-j\kappa z}
 \end{aligned} \tag{11.127}$$

donde

$$I_0 = \frac{2\pi V_0}{\ln(b/a)\eta}$$

Como la relación entre \mathbf{H} e I es unívoca, también podemos hablar de una onda de corriente.

11.3.3. Impedancia característica

La relación entre la onda de voltaje –ecuación (11.126)– y la onda de corriente –ecuación (11.127)– tiene unidades de Ohmios y es una función de la geometría transversal de la línea y de las propiedades intrínsecas del dieléctrico:

$$\frac{V}{I} = Z_c = \frac{\ln(b/a)}{2\pi} \eta \tag{11.128}$$

Z_c se conoce como impedancia característica del cable coaxial.

11.3.4. Atenuación del cable coaxial

La atenuación $\alpha = \alpha_C + \alpha_D$ del cable coaxial se puede calcular haciendo uso de las fórmulas (11.115) y (11.117), respectivamente, sustituyendo en ellas las expresiones de los campos (11.124) y (11.125).

Atenuación debido al conductor

A partir de la ecuación (11.115):

$$\begin{aligned}
 \alpha_C &= \frac{\Re\{\eta_C\} \oint_{L_{lat}} \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^* d\boldsymbol{\ell}}{2\eta_D \int_{S_T} \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^* ds} \\
 &= \frac{\Re\{\eta_C\} \left[\frac{V_0}{\ln(b/a)\eta_D} \right]^2 \left(\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a} + \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{b} \right)}{2\eta_D \left[\frac{V_0}{\ln(b/a)\eta_D} \right]^2 \int_a^b \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi d\rho}{\rho}} \\
 &= \frac{\Re\{\eta_C\}}{2\eta_D} \frac{a+b}{ab} \frac{1}{\ln(b/a)}
 \end{aligned} \tag{11.129}$$

y tomando en cuenta que para un buen conductor $\Re\{\eta_C\} = \sqrt{\frac{\omega\mu_0}{2\sigma}} = \sqrt{\frac{\pi f\mu_0}{\sigma}}$ y que para un un buen dieléctrico $\eta_D = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon'}}$, resulta:

$$\alpha_C = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\frac{\pi f\epsilon'}{\sigma}}}{\ln(b/a)} \frac{a+b}{ab} \quad (11.130)$$

Atenuación debido al dieléctrico

A partir de la ecuación (11.117):

$$\begin{aligned} \alpha_D &= \frac{\omega\epsilon'' \int_{S_T} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* ds}{2\eta_D \int_{S_T} \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^* ds} \\ &= \frac{\omega\epsilon'' \left[\frac{V_0}{\ln(b/a)} \right]^2 \int_a^b \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi d\rho}{\rho}}{2\eta_D \left[\frac{V_0}{\ln(b/a)\eta_D} \right]^2 \int_a^b \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi d\rho}{\rho}} \\ &= \pi f \epsilon'' \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon'}} \end{aligned} \quad (11.131)$$

Atenuación resultante

Finalmente podemos escribir:

$$\alpha = \underbrace{\pi f \epsilon'' \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon'}}}_{\alpha_D} + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{\sqrt{\frac{\pi f\epsilon'}{\sigma}}}{\ln(b/a)} \frac{a+b}{ab}}_{\alpha_C} \quad (11.132)$$

11.4. Guía de onda rectangular

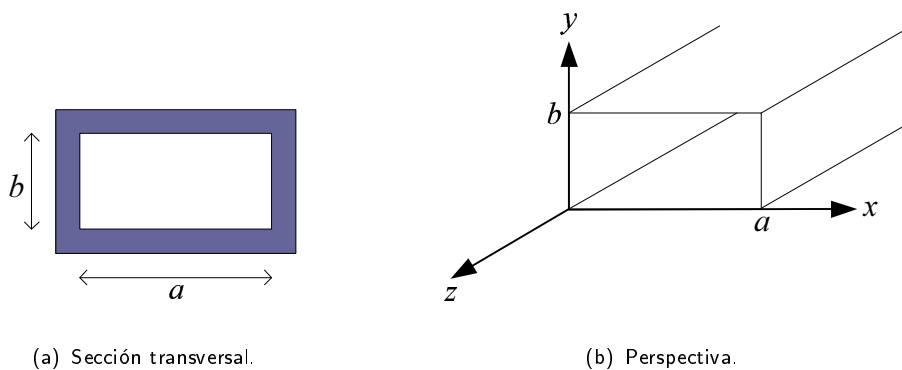


Figura 11.4: Guía de Onda rectangular.

La geometría de una guía de onda rectangular se muestra en la figura 11.4. La ecuación de HELMHOLTZ en este caso asume la forma:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \kappa_T^2 u = 0 \quad (11.133)$$

Para las ondas TE:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 h_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h_z}{\partial y^2} + \kappa_T^2 h_z &= 0 \\ \frac{\partial h_z}{\partial x} &= 0 \text{ para } \begin{cases} x = 0 \\ x = a \end{cases} \\ \frac{\partial h_z}{\partial y} &= 0 \text{ para } \begin{cases} y = 0 \\ y = b \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (11.134)$$

Para las ondas TM:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 e_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e_z}{\partial y^2} + \kappa_T^2 e_z &= 0 \\ e_z &= 0 \text{ para } \begin{cases} x = 0 & y = 0 \\ x = a & y = b \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (11.135)$$

La ecuación 11.133 se resuelve asumiendo una solución producto: $u(x, y) = X(x)Y(y)$, donde las funciones X y Y dependen exclusivamente de las variables x y y , respectivamente:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \kappa_T^2 u = 0 \quad (11.136)$$

$$Y \frac{d^2 X}{dx^2} + X \frac{d^2 Y}{dy^2} + \kappa_T^2 XY = 0 \quad (11.137)$$

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \kappa_T^2 = 0 \quad (11.138)$$

La ecuación 11.138 se separa en dos ecuaciones:

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \kappa_T^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{d^2 X}{dx^2} + \kappa_x^2 X = 0 \\ \frac{d^2 Y}{dy^2} + \kappa_y^2 Y = 0 \end{cases} \quad (11.139)$$

donde $\kappa_x^2 + \kappa_y^2 = \kappa_T^2$. Las soluciones de las ecuaciones 11.139 son:

$$X(x) = A \cos(\kappa_x x) + B \sin(\kappa_x x)$$

$$Y(y) = C \cos(\kappa_y y) + D \sin(\kappa_y y)$$

Y por tanto:

$$u(x, y) = [A \cos(\kappa_x x) + B \sin(\kappa_x x)][C \cos(\kappa_y y) + D \sin(\kappa_y y)] \quad (11.140)$$

Para las ondas TE, la aplicación de las condiciones de borde especificadas en la ecuación 11.134 permite obtener la solución para h_z :

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial h_z}{\partial x} \right|_{x=0} &= 0 \Rightarrow -\kappa_x [A \sin(\kappa_x 0) - B \cos(\kappa_x 0)]Y = 0 \Rightarrow B = 0 \\ \left. \frac{\partial h_z}{\partial x} \right|_{x=a} &= 0 \Rightarrow -\kappa_x A \sin(\kappa_x a)Y = 0 \Rightarrow \kappa_x = \frac{m\pi}{a}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \\ \left. \frac{\partial h_z}{\partial y} \right|_{y=0} &= 0 \Rightarrow -X \kappa_y [C \sin(\kappa_y 0) - D \cos(\kappa_y 0)] = 0 \Rightarrow D = 0 \\ \left. \frac{\partial h_z}{\partial y} \right|_{y=b} &= 0 \Rightarrow -X \kappa_y C \sin(\kappa_y b) = 0 \Rightarrow \kappa_y = \frac{n\pi}{b}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Y

$$h_z(x, y) = H_{mn} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \quad (11.141)$$

donde $H_{mn} = AC$.

La ecuación (11.141) representa la familia de modos de propagación *TE* o *H*.

Para las ondas TM, la aplicación de las condiciones de borde especificadas en la ecuación 11.135 permite obtener la solución para e_z :

$$\begin{aligned} e_z|_{x=0} &= 0 \Rightarrow [A \cos(\kappa_x 0) + B \sin(\kappa_x 0)]Y = 0 \Rightarrow A = 0 \\ e_z|_{x=a} &= 0 \Rightarrow B \sin(\kappa_x a)Y = 0 \Rightarrow \kappa_x = \frac{m\pi}{a}, \quad m = 1, 2, 3, \dots \\ e_z|_{y=0} &= 0 \Rightarrow X[C \cos(\kappa_y 0) + D \sin(\kappa_y 0)] = 0 \Rightarrow C = 0 \\ e_z|_{y=b} &= 0 \Rightarrow XD \sin(\kappa_y b) = 0 \Rightarrow \kappa_y = \frac{n\pi}{b}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Y

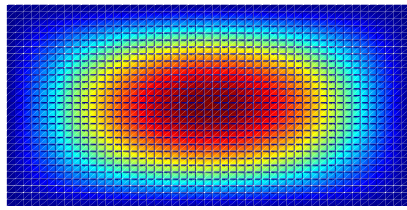
$$e_z(x, y) = E_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \quad (11.142)$$

donde $E_{mn} = BD$.

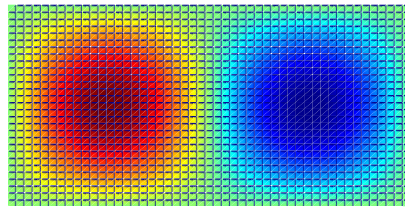
La ecuación (11.142) representa la familia de modos de propagación *TM* o *E*.

A partir de las soluciones 11.141 y 11.142, y utilizando las ecuaciones de los cuadros 11.4 y 11.5, se pueden determinar las componentes restantes de los campos. En el cuadro 11.7 se resumen estos resultados junto con otros parámetros de interés.

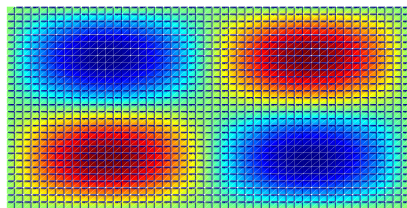
En la Figura 11.5 se muestra la estructura transversal de $e_{zm,n}$ correspondiente a los modos $TM_{1,1}$ –Fig. 11.5(a)–, $TM_{1,2}$ –Fig. 11.5(b)–, $TM_{2,2}$ –Fig. 11.5(c)– y



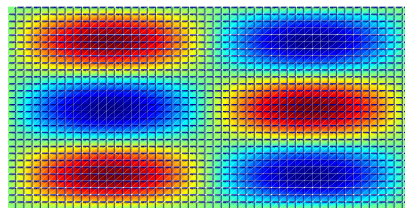
(a) Modo $TM_{1,1}$



(b) Modo $TM_{1,2}$



(c) Modo $TM_{2,2}$



(d) Modo $TM_{3,2}$

Figura 11.5: Estructura transversal de $e_{z,m,n}(x,y)$ en una guía de onda rectangular de dimensiones $a \times b$, con $a = 2b$.

$TM_{3,2}$ –Fig. 11.5(d)–. Tales gráficas fueron elaboradas usando MATLAB, mediante el siguiente código:

```
a=1; b=0.5;
x=linspace(0,a,50);
y=linspace(0,b,30);
[X,Y]=meshgrid(x,y);
ez=sin(m*pi*X./a).*sin(n*pi*Y./b);
surf(X,Y,ez);
shading('interp');
axis([0 a 0 b]) set(gca,'PlotBoxAspectRatio', [2 1 1]);
view(0,90),axis equal, grid off, box off , axis off
```

Cuadro 11.7: Estructura de los campos y otras propiedades en una guía de onda rectangular.

	modos TE	modos TM
H_z	$H_{mn} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-j\kappa_{\ell,mn}z}$	0
E_z	0	$E_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-j\kappa_{\ell,mn}z}$
E_x	$\eta_{TE,mn} H_{mn} j \frac{\kappa_{\ell,mn}}{\kappa_{T,mn}^2} \frac{n\pi}{b} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-j\kappa_{\ell,mn}z}$	$-j E_{mn} \frac{\kappa_{\ell,mn}}{\kappa_{T,mn}^2} \frac{m\pi}{a} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-j\kappa_{\ell,mn}z}$
E_y	$-\eta_{TE,mn} H_{mn} j \frac{\kappa_{\ell,mn}}{\kappa_{T,mn}^2} \frac{m\pi}{a} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-j\kappa_{\ell,mn}z}$	$-j E_{mn} \frac{\kappa_{\ell,mn}}{\kappa_{T,mn}^2} \frac{n\pi}{b} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-j\kappa_{\ell,mn}z}$
H_x	$H_{mn} j \frac{\kappa_{\ell,mn}}{\kappa_{T,mn}^2} \frac{m\pi}{a} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-j\kappa_{\ell,mn}z}$	$j \frac{E_{mn}}{\eta_{TM,mn}} \frac{\kappa_{\ell,mn}}{\kappa_{T,mn}^2} \frac{n\pi}{b} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-j\kappa_{\ell,mn}z}$
H_y	$H_{mn} j \frac{\kappa_{\ell,mn}}{\kappa_{T,mn}^2} \frac{n\pi}{b} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-j\kappa_{\ell,mn}z}$	$-j \frac{E_{mn}}{\eta_{TM,mn}} \frac{\kappa_{\ell,mn}}{\kappa_{T,mn}^2} \frac{m\pi}{a} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-j\kappa_{\ell,mn}z}$
$\eta_{TE,mn}$	$\frac{\kappa}{\kappa_{\ell,mn}} \eta$	
$\eta_{TM,mn}$		$\frac{\kappa_{\ell,mn}}{\kappa} \eta$
$\kappa_{T,mn}$	$\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$	
$\kappa_{\ell,mn}$	$\sqrt{\kappa^2 - \left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right]}$	
$f_{c,mn}$	$\frac{1}{2\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}$	
$\lambda_{c,mn}$	$\frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}}$	

11.4.1. Condición de propagación

Para que un determinado modo se propague en la guía es necesario que el coeficiente de propagación $\kappa_{\ell,mn}$:

$$\begin{aligned}\kappa_{\ell,mn} &= \sqrt{\kappa^2 - \kappa_T^2} \\ &= \sqrt{\omega^2 \mu \varepsilon - \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]}\end{aligned}$$

sea real, circunstancia que se conoce como **condición de propagación**:

$$\begin{aligned}(2\pi f)^2 \mu \varepsilon &> \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \\ f &> \frac{1}{2\pi \sqrt{\mu \varepsilon}} \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2}\end{aligned}\tag{11.143}$$

11.4.2. Frecuencia de corte

La frecuencia límite a partir de la cual un determinado modo m, n puede propagarse se conoce como **frecuencia de corte** de dicho modo:

$$f_{c,mn} = \frac{1}{2\pi \sqrt{\mu \varepsilon}} \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2}\tag{11.144}$$

11.4.3. Modo dominante

El modo que presenta la frecuencia de corte menor se conoce como **modo dominante**. Con la ayuda de la Ec. (11.144) y poniendo $a = 2b$, se ha llenado el Cuadro 11.8.

Cuadro 11.8: Frecuencias de corte de los primeros modos.

modo	frecuencia de corte
m,n	$\frac{1}{2\pi \sqrt{\mu \varepsilon}} \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2}$
1,0	$\frac{1}{2a \sqrt{\mu \varepsilon}}$
0,1	$\frac{1}{a \sqrt{\mu \varepsilon}}$
1,1	$\frac{\sqrt{5}}{2a \sqrt{\mu \varepsilon}}$
2,1	$\frac{2}{\sqrt{2} a \sqrt{\mu \varepsilon}}$
1,2	$\frac{\sqrt{17}}{2a \sqrt{\mu \varepsilon}}$

A partir del Cuadro 11.8 se observa que:

$$f_{c,10} < f_{c,01} < f_{c,11} < f_{c,21} < f_{c,12} < f_{c,22} < \dots$$

El rango $[f_{c,10}, f_{c,01}]$ es el rango de frecuencias en el que se suele usar la guía, dado que en dicho rango solo se propaga el modo dominante.

De la solución de e_z –ecuación (11.142)– vemos que los modos TM requieren que m y n sean ambos distintos de cero, por lo que el modo más bajo que puede propagarse es el modo TM_{11} . Tal restricción no existe para los modos TE –ver ecuación (11.141)–, siendo el modo TE_{10} el modo dominante.

Problema

1. Diseñe una guía de onda rectangular para que opere en la banda K (18 : 26.5 GHz).
 - a) Determine los valores de a y b de la guía.
 - b) Determine un valor de frecuencia que permita la propagación del modo TM_{11} en la guía diseñada.
 - c) Se desea excitar dicho modo mediante ondas planas. Diga sobre que lados de la guía debería(n) incidir la(s) onda(s) plana(s) para excitar el modo TM_{11} .
 - d) Diga que polarización debería(n) tener la(s) onda(s) incidente(s) para excitar el modo TM_{11} a la frecuencia calculada en el literal (b).
 - e) Determine el(los) ángulo(s) de incidencia correspondiente(s) de la(s) onda(s) plana(s) del punto anterior.

11.5. Guía de onda circular

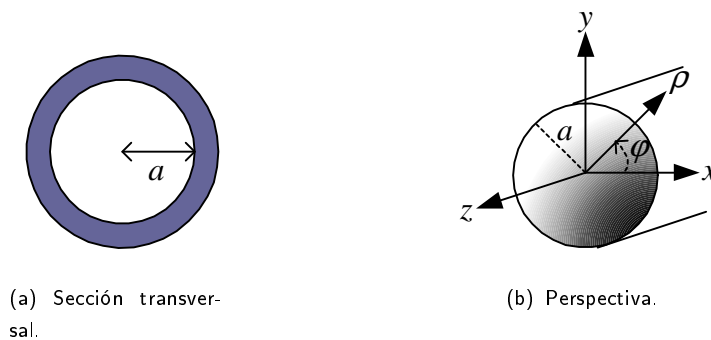


Figura 11.6: Guía de Onda circular.

La geometría de una guía de onda circular se muestra en la figura 11.7. La ecuación de HELMHOLTZ en este caso asume la forma:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \kappa_T^2 u = 0 \quad (11.145)$$

Para las ondas TE:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 h_z}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial h_z}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 h_z}{\partial \varphi^2} + \kappa_T^2 h_z &= 0 \\ \frac{\partial h_z}{\partial \rho} &= 0, \text{ para } \rho = a \end{aligned} \right\} \quad (11.146)$$

Para las ondas TM:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 e_z}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial e_z}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 e_z}{\partial \varphi^2} + \kappa_T^2 e_z &= 0 \\ e_z &= 0, \text{ para } \rho = a \end{aligned} \right\} \quad (11.147)$$

La ecuación 11.145 se resuelve asumiendo una solución producto: $u(\rho, \varphi) = P(\rho)\Phi(\varphi)$, donde las funciones P y Φ dependen exclusivamente de las variables ρ y φ , respectivamente:

$$\begin{aligned} \Phi \frac{d^2 P}{d\rho^2} + \frac{\Phi}{\rho} \frac{dP}{d\rho} + \frac{P}{\rho^2} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + \kappa_T^2 P\Phi &= 0 \\ \frac{1}{P} \frac{d^2 P}{d\rho^2} + \frac{1}{P\rho} \frac{dP}{d\rho} + \frac{1}{\Phi\rho^2} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + \kappa_T^2 &= 0 \end{aligned}$$

multiplicando este resultado por ρ^2 se obtiene:

$$\frac{\rho^2}{P} \frac{d^2 P}{d\rho^2} + \frac{\rho}{P} \frac{dP}{d\rho} + \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + \rho^2 \kappa_T^2 = 0 \quad (11.148)$$

$$\frac{\rho^2}{P} \frac{d^2 P}{d\rho^2} + \frac{\rho}{P} \frac{dP}{d\rho} + \rho^2 \kappa_T^2 = -\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} \quad (11.149)$$

La ecuación 11.149 se separa en dos ecuaciones:

$$\frac{\rho^2}{P} \frac{d^2 P}{d\rho^2} + \frac{\rho}{P} \frac{dP}{d\rho} + \rho^2 \kappa_T^2 = -\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\rho^2}{P} \frac{d^2 P}{d\rho^2} + \frac{\rho}{P} \frac{dP}{d\rho} + \rho^2 \kappa_T^2 = \nu^2 \\ \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = -\nu^2 \end{cases}$$

o

$$\frac{d^2 P}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dP}{d\rho} + \left(\kappa_T^2 - \frac{\nu^2}{\rho^2} \right) P = 0 \quad (11.150)$$

$$\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + \nu^2 \Phi = 0 \quad (11.151)$$

donde ν^2 es cierta constante de separación.

Las solución de la ecuación 11.151 es:

$$\Phi(\varphi) = A \cos(\nu\varphi) + B \sin(\nu\varphi)$$

donde A y B son dos constantes indeterminadas. Como la función $\Phi(\varphi)$ ha de ser unievaluada: $\Phi[\nu(\alpha + 2\pi)] = \Phi(\nu\alpha)$, ν ha de ser un número entero:

$$\Phi(\varphi) = A \cos(n\varphi) + B \sin(n\varphi)$$

La solución de la ecuación 11.150 es:

$$C J_n(\kappa_T \rho) + D Y_n(\kappa_T \rho)$$

donde C y D son dos constante indeterminadas, J_n es la función de BESSEL de orden n –ver la Fig. 11.7(a)–, y Y_n es la función de NEUMAN de orden n –ver la Fig. 11.7(b)–.

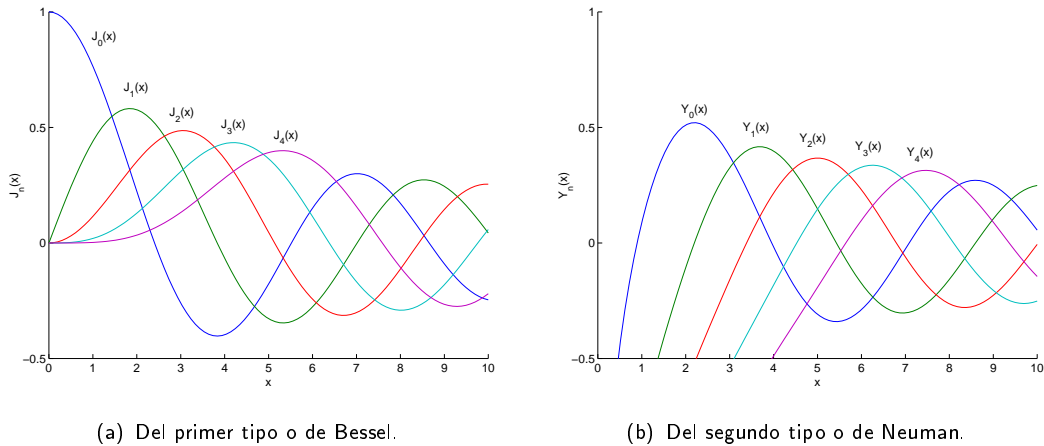


Figura 11.7: Funciones de BESSEL.

La función de BESSEL $J_n(x)$ se define como:

$$J_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (x/2)^{n+2m}}{m!(n+m)!}$$

Las funciones J_n y Y_n se conocen también como funciones de BESSEL de primer y segundo tipo, respectivamente, de orden n . La función de BESSEL de segundo tipo se le suele denominar también de NEWMAN, y en algunos textos se le designa con letra N : $N_n(x)$.

La ecuación 11.150 se denomina **ecuación de las funciones cilíndricas** o **Ecuación de BESSEL**. Sus soluciones, las funciones J_n y Y_n , se denominan **funciones cilíndricas**. Las funciones J_n y Y_n no son periódicas, pero al crecer ρ , oscilan cerca de cero, decrecen monótonamente, y se aproximan a las funciones trigonométricas para $\rho \rightarrow \infty$ (ver figuras 11.7(a) y 11.7(b)). Es cómodo comparar la ecuación de funciones cilíndricas con la ecuación de funciones trigonométricas y exponenciales, así como las soluciones respectivas:

Cuadro 11.9: Comparación entre las ecuaciones diferenciales de las funciones cilíndricas y de las funciones trigonométricas.

Ec. dif. de las funciones cilíndricas	Ec. dif. de las funciones trigonométricas
$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)y = 0$	$y'' + y = 0$
$\{J_n(x), Y_n(x), H_n^{(1)}(x), H_n^{(2)}(x)\}$	$\{\cos(x), \sin(x), e^{jx}, e^{-jx}\}$
$J_n(x)$	$\cos(x)$
$Y_n(x)$	$\sin(x)$
$H_n^{(1)}(x)$	e^{jx}
$H_n^{(2)}(x)$	e^{-jx}

donde $H_n^{(1)}(x) = J_n(x) + jY_n(x)$ y $H_n^{(2)}(x) = J_n(x) - jY_n(x)$ son las funciones de HANKEL de primero y segundo tipo, o especie, respectivamente. Así como las funciones exponenciales son ideales para representar procesos propagantes, de la misma manera lo son las funciones de HANKEL. Por otro lado, las funciones de BESSEL y de NEWMAN naturalmente representan procesos estacionarios.

La función de NEUMAN $Y_n(\kappa_T \rho) \rightarrow \infty$ para $\rho \rightarrow 0$ –ver Fig. 11.7(b)–. Por esta razón la solución de la ecuación 11.145 asume definitivamente la forma:

$$u(\rho, \varphi) = [A \cos(n\varphi) + B \sin(n\varphi)]J_n(\kappa_T \rho)$$

11.5.1. Ondas TE

Para las ondas TE, la aplicación de las condiciones de borde, especificadas en la ecuación 11.146, permite obtener los autovalores $\{\kappa_{T,nm}\}$ a partir de las raíces de

las ecuaciones⁴:

$$J'_n(\kappa_T a) = 0 \quad (11.152)$$

de donde

$$\kappa_{T,nm} = \frac{p'_{nm}}{a}$$

siendo p'_{nm} la raíz m -ésima de la ecuación 11.152⁵ –ver Cuadro 11.10(a)–, $n = 0, 1, 2, \dots$, y $m = 1, 2, 3, \dots$

Cuadro 11.10: Raíces p'_{nm} y p_{nm} .

(a) Algunas raíces p'_{nm} .				(b) Algunas raíces p_{nm} .			
n	p'_{n1}	p'_{n2}	p'_{n3}	n	p_{n1}	p_{n2}	p_{n3}
0	3.832	7.016	10.174	0	2.405	5.520	8.654
1	1.841	5.331	8.536	1	3.832	7.016	10.174
2	3.054	6.706	9.970	2	5.135	8.417	11.620

Las soluciones para h_z (modos o autofunciones) tienen la forma:

$$h_z(\rho, \varphi) = [A \cos(n\varphi) + B \sin(n\varphi)] J_n \left(\frac{p'_{nm}}{a} \rho \right) \quad (11.153)$$

11.5.2. Ondas TM

Para las ondas TM, la aplicación de las condiciones de borde, especificadas en la ecuación 11.147 permite obtener los autovalores $\{\kappa_{T,nm}\}$ a partir de las raíces de las ecuaciones:

$$J_n(\kappa_T a) = 0 \quad (11.154)$$

de donde

$$\kappa_{T,nm} = \frac{p_{nm}}{a}$$

siendo p_{nm} la raíz m -ésima de la ecuación 11.154⁶ –ver Cuadro 11.10(b)–, $n = 0, 1, 2, \dots$, y $m = 1, 2, 3, \dots$

Las soluciones para e_z (modos o autofunciones) tienen la forma:

$$e_z(\rho, \varphi) = [A \cos(n\varphi) + B \sin(n\varphi)] J_n \left(\frac{p_{nm}}{a} \rho \right) \quad (11.155)$$

⁴Se comprueba que $J'_n(x) = \frac{n}{x} J_n(x) - J_{n+1}(x)$.

⁵La ecuación 11.152 se obtiene al igualar la derivada de la función de BESSEL de orden n evaluada en $\rho = a$ a cero.

⁶La ecuación 11.154 se obtiene al igualar la función de BESSEL de orden n evaluada en $\rho = a$ a cero.

Cuadro 11.11: Estructura de los campos y otras propiedades en una guía de onda circular.

	modos TE	modos TM
H_z	$J_n \left(\frac{p'_{nm}}{a} \rho \right) \left\{ \begin{array}{l} A \cos(n\varphi) \\ +B \sin(n\varphi) \end{array} \right\} e^{-j\kappa_{\ell, nm}}$	0
E_z	0	$J_n \left(\frac{p_{nm}}{a} \rho \right) \left\{ \begin{array}{l} A \cos(n\varphi) \\ +B \sin(n\varphi) \end{array} \right\} e^{-j\kappa_{\ell, nm}}$
E_ρ	$-j\eta_{TE, nm} \frac{\kappa_{\ell, nm}}{\kappa_{T, nm}^2} J_n \left(\frac{p'_{nm}}{a} \rho \right) \frac{n}{\rho} \left\{ \begin{array}{l} B \cos(n\varphi) \\ -A \sin(n\varphi) \end{array} \right\} e^{-j\kappa_{\ell, nm}}$	$-j \frac{\kappa_{\ell, nm}}{\kappa_{T, nm}} \frac{p'_{nm}}{a} J'_n \left(\frac{p_{nm}}{a} \rho \right) \left\{ \begin{array}{l} A \cos(n\varphi) \\ +B \sin(n\varphi) \end{array} \right\} e^{-j\kappa_{\ell, nm}}$
E_φ	$j\eta_{TE, nm} \frac{\kappa_{\ell, nm}}{\kappa_{T, nm}} \frac{p'_{nm}}{a} J'_n \left(\frac{p'_{nm}}{a} \rho \right) \left\{ \begin{array}{l} A \cos(n\varphi) \\ +B \sin(n\varphi) \end{array} \right\} e^{-j\kappa_{\ell, nm}}$	$-j \frac{n\kappa_{\ell, nm}}{\kappa_{T, nm}^2} J_n \left(\frac{p_{nm}}{a} \rho \right) \frac{n}{\rho} \left\{ \begin{array}{l} B \cos(n\varphi) \\ -A \sin(n\varphi) \end{array} \right\} e^{-j\kappa_{\ell, nm}}$
H_ρ	$-j \frac{\kappa_{\ell, nm}}{\kappa_{T, nm}} \frac{p'_{nm}}{a} J'_n \left(\frac{p'_{nm}}{a} \rho \right) \left\{ \begin{array}{l} A \cos(n\varphi) \\ +B \sin(n\varphi) \end{array} \right\} e^{-j\kappa_{\ell, nm}}$	$j \frac{1}{\eta_{TM, nm}} \frac{\kappa_{\ell, nm}}{\kappa_{T, nm}^2} J_n \left(\frac{p_{nm}}{a} \rho \right) \frac{n}{\rho} \left\{ \begin{array}{l} B \cos(n\varphi) \\ -A \sin(n\varphi) \end{array} \right\} e^{-j\kappa_{\ell, nm}}$
H_φ	$-j \frac{\kappa_{\ell, nm}}{\kappa_{T, nm}^2} J_n \left(\frac{p'_{nm}}{a} \rho \right) \frac{n}{\rho} \left\{ \begin{array}{l} B \cos(n\varphi) \\ -A \sin(n\varphi) \end{array} \right\} e^{-j\kappa_{\ell, nm}}$	$-j \frac{1}{\eta_{TM, nm}} \frac{\kappa_{\ell, nm}}{\kappa_{T, nm}} \frac{p'_{nm}}{a} J'_n \left(\frac{p_{nm}}{a} \rho \right) \left\{ \begin{array}{l} A \cos(n\varphi) \\ +B \sin(n\varphi) \end{array} \right\} e^{-j\kappa_{\ell, nm}}$
$\eta_{TE, mn}$	$\frac{\kappa_{T, nm} \eta}{\kappa_{\ell, nm}}$	
$\eta_{TM, mn}$		$\frac{\kappa_{\ell, nm}}{\kappa_{T, nm}} \eta$
$\kappa_{T, mn}$	$\frac{p'_{nm}}{a}$	$\frac{p_{nm}}{a}$
$\kappa_{\ell, mn}$	$\sqrt{\kappa^2 - \left(\frac{p'_{nm}}{a} \right)^2}$	$\sqrt{\kappa^2 - \left(\frac{p_{nm}}{a} \right)^2}$
$f_{c, mn}$	$\frac{1}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}} \frac{p'_{nm}}{a}$	$\frac{1}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}} \frac{p_{nm}}{a}$
$\lambda_{c, mn}$	$\frac{2\pi a}{p'_{nm}}$	$\frac{2\pi a}{p_{nm}}$

A partir de las soluciones 11.153 y 11.155, y utilizando las ecuaciones de los cuadros 11.4 y 11.5, se pueden determinar las componentes restantes de los campos. En el cuadro 11.11 se resumen estos resultados junto con otros parámetros de interés.

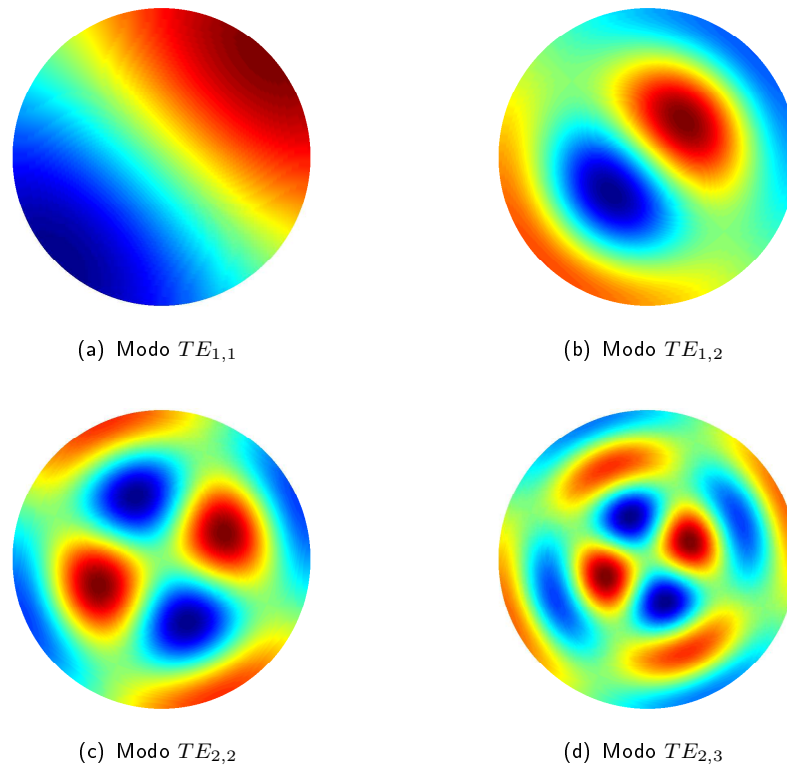


Figura 11.8: Estructura transversal de $h_{zm,n}(x,y)$ en una guía de onda circular.

En la Figura 11.8 se muestra la estructura transversal de $h_{zm,n}$ correspondiente a los modos $TE_{1,1}$ –Fig. 11.8(a)–, $TE_{1,2}$ –Fig. 11.8(b)–, $TE_{2,2}$ –Fig. 11.8(c)– y $TE_{2,3}$ –Fig. 11.8(d)–. Tales gráficas fueron elaboradas usando MATLAB, mediante el siguiente código:

```
A=0,5 B=0,5
phi=linspace(0,(2*pi),200);
r=linspace(0,1,200);
[Phi,R]=meshgrid(phi,r);
[X,Y]=pol2cart(Phi,R);
p=[3.832,7.016,10.174;1.841,5.331,8.536;3.054,6.706,9.970]
Hz=besselj(n,p(n+1,m)*R).*(A*cos(n*Phi)+B*sin(n*Phi));
surf(X,Y,HZ);
shading('interp');
view(0,90),axis equal, grid off, box off, axis off
```

11.5.3. Modo dominante

Inspeccionado las tablas 11.10(b) y 11.10(a) se observa que el modo TE_{11} –ver Fig. 11.8(a)– es el modo dominante. Para este modo tenemos: ver cuadro 11.12.

Cuadro 11.12: Campos del modo TE_{11}

\mathbf{E}	\mathbf{H}
$E_\rho = -j \frac{E_{\rho,11}}{\rho} J_1 \left(\frac{p'_{11}}{a} \rho \right) \left\{ \begin{array}{l} B \cos(\varphi) \\ -A \sin(\varphi) \end{array} \right\} e^{-j\kappa_{\ell,11}}$	$H_\rho = -j H_{\rho,11} J'_1 \left(\frac{p'_{11}}{a} \rho \right) \left\{ \begin{array}{l} A \cos(\varphi) \\ +B \sin(\varphi) \end{array} \right\} e^{-j\kappa_{\ell,11}}$
$E_\varphi = j E_{\varphi,11} J'_1 \left(\frac{p'_{11}}{a} \rho \right) \left\{ \begin{array}{l} A \cos(\varphi) \\ +B \sin(\varphi) \end{array} \right\} e^{-j\kappa_{\ell,11}}$	$H_\varphi = -j \frac{H_{\varphi,11}}{\rho} J_1 \left(\frac{p'_{11}}{a} \rho \right) \left\{ \begin{array}{l} B \cos(\varphi) \\ -A \sin(\varphi) \end{array} \right\} e^{-j\kappa_{\ell,11}}$
$E_z = 0$	$H_z = J_1 \left(\frac{p'_{11}}{a} \rho \right) \left\{ \begin{array}{l} A \cos(\varphi) \\ +B \sin(\varphi) \end{array} \right\} e^{-j\kappa_{\ell,11}}$

Con la ayuda de la gráfica 11.9 podemos trazar las líneas de fuerza de \mathbf{E} y de \mathbf{H} a mano alzada. ¡Inténtalo!

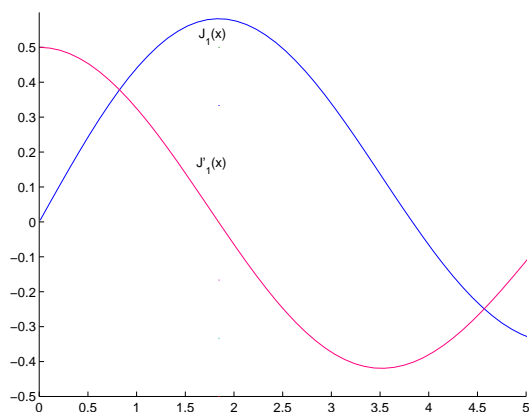


Figura 11.9: J_1 y J'_1 .

11.6. Relación entre la densidad de corriente superficial \mathbf{J}_s de un conductor perfecto y la densidad de corriente \mathbf{J} en un conductor real

En un conductor ideal los campos eléctrico y magnético son nulos, y la corriente es superficial –ver figura 11.10(a)–. De tal suerte que si se toma un contorno Γ cerrado, como se ilustra en la figura 11.10(a), y se calcula la circulación de \mathbf{H} , se obtiene:

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} \mathbf{H} \cdot d\boldsymbol{\ell} &= \int_{S(\Gamma)} \mathbf{J}_s \cdot d\mathbf{s} \\ &= - \int_{\Delta y} \mathbf{J}_s \cdot dy \mathbf{a}_x \end{aligned} \quad (11.156)$$

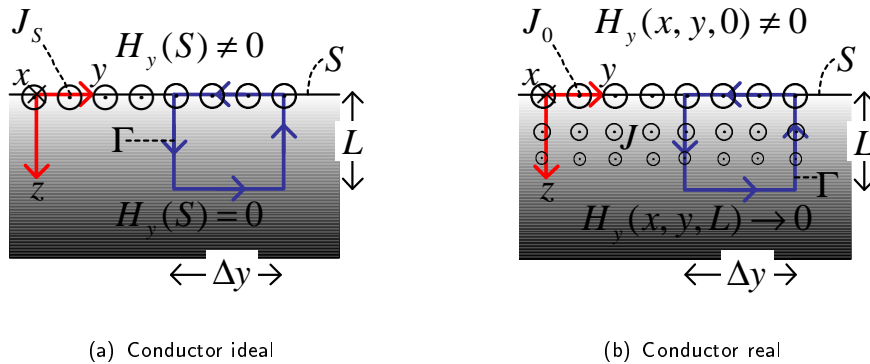


Figura 11.10: Relación entre \mathbf{J}_s y \mathbf{J} .

En un conductor real los campos eléctrico y magnético no son nulos, y la corriente, aunque se atenúa fuertemente a razón de $1/\delta$ neperios por metro de longitud, se distribuye voluméticamente – ver figura 11.10(b)–. Si tomamos un contorno Γ , similar a como se procedió en el caso del conductor real y como se indica en la figura 11.10(b), al calcular la circulación de \mathbf{H} se obtiene:

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} \mathbf{H} \cdot d\boldsymbol{\ell} &= \int_{S(\Gamma)} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} \\ &= - \int_{\Delta y} \int_0^L \mathbf{J} \cdot dz dy \mathbf{a}_x \\ &= - \int_{\Delta y} \underbrace{\int_0^L \mathbf{J} dz}_{\mathbf{J}_s} \cdot dy \mathbf{a}_x \\ &= - \int_{\Delta y} \mathbf{J}_s \cdot dy \mathbf{a}_x \end{aligned} \quad (11.157)$$

donde se ha definido de manera natural la densidad superficial de corriente \mathbf{J}_s del conductor ideal en términos de la densidad de corriente \mathbf{J} del conductor real:

$$\mathbf{J}_s = \int_0^L \mathbf{J} dz \quad (11.158)$$

Bibliografía

- [1] Murray R. Spiegel. *Vector Analysis and an introduction to tensor analysis*. McGraw-Hill. Schaum's Outlines, 1959.
- [2] Roger F. Harrington. *Time-Harmonic Electromagnetics Fields*. McGraw-Hill, U.S.A., 1961.
- [3] Syed A. Nasar. *2000 solved problems in electromagnetism*. McGraw Hill, USA, 1992.
- [4] William H. Hayt. *Teoría Electromagnética*. Mc. Graw Hill, 5 edition, 1994.
- [5] V. V. Nikolski. *Electrodinámica y propagación de ondas de radio*. MIR, Moscú, 1980.
- [6] Reitz/Milford/Christy. *Fundamentos de la teoría electromagnética*. Addison-Wesley Iberoamericana, USA, 1984.
- [7] David Cheng. *Fundamentos de electromagnetismo para ingeniería*. Addison-Wesley Iberoamericana, USA, 1997.
- [8] Richmond B. McQuistan. *Campos Escalares y Vectoriales. Interpretación física*. Limusa-Wiley, México, 1969.
- [9] Simo Ramo, Jhon R. Whinnery, and Theodore Van Duzer. *Fields and Waves in Communication Electronics*. John Wiley and & Sons, Inc., USA, 1965.
- [10] Paul Lorrain and Dale R. Corson. *campos y ondas electromagnéticos*. Seleccion Científicas, Madrid, España, 1972.
- [11] Richard Feynman, Robert B. Leighton, and Matthew Sands. *Física. Volumen II: Electromagnetismo y materia*. Addison Wesley Iberoamericana, S. A., México, 1987.

- [12] M. A. Plonus. *Electromagnetismo aplicado*. Editorial Reverté S. A., Barcelona, España, 1982.
- [13] Rafael Sanjurjo. *Electromagnetismo*. Mc Graw Hill, Madrid, España, 1988.
- [14] Stanley V. Marshall, Richard E. DuBroff, and Gabriel G. SkiteK. *Electromagnetismo, conceptos y aplicaciones*. Prentice Hall Hispanoamericana, México, 1997.
- [15] Hermann A. Haus and James R. Melcher. *Electromagnetic Fields and Energy*. Prentice Hall, USA, 1989.
- [16] Roald Wangsness. *Campos electromagnéticos*. Limusa, 2001.
- [17] John W. Arthur. The fundamentals of electromagnetic theory revisited. *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, 50(1), Feb. 2008.
- [18] Albert Einstein. *Relativity: The Special and the General Theory. A Clear Explanation that Anyone Can Understand*. Routledge Classics 2001, 1916.
- [19] Department of Physics and Astronomy. Hyperphysics. Georgia State University, Atlanta, Georgia. <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/hframe.html>, 2001.
- [20] Max Born. *Einstein's Theory of Relativity*. Dover Publications, Inc., 1965.
- [21] N. Fiodorov. *Fundamentos de Electrodinámica*. MIR, 1982.
- [22] Dennis M. Sullivan. *Electromagnetic Simulation using the FDTD Method*. IEEE Press, 2000.
- [23] Kane S. Yee. Numerical solution of initial boundary value problems involving maxwell's equations in isotropic media. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 14(3):302–307, May 1966.
- [24] A. Taflove. *Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method*. Norwood, MA: Artech House, 1995.
- [25] A. J. Zozaya. On the non-radiative and quasi-static conditions and the circuit theory limitations. *American Journal of Physics*, 75(6):565–569, June 2007.
- [26] A. J. Zozaya. A formal approach for calculating the radiation fields of a linear wire antenna. *Progress In Electromagnetics Research M*, 6:1–8, 2009.

- [27] J. D. Jackson. How an antenna launches its input power into radiation: The pattern of the poynting vector at and near an antenna. *Am. J. Phys.*, 74(4):280–288, April 2006.
- [28] Rafael Albornoz. *Introducción a las antenas*. Universidad de Carabobo, 1998.
- [29] Constantine Balanis. *Antenna Theory, Analysis and Design*. John Wiley & Sons, Inc., 1982.
- [30] Robert E. Collin. *Foundations for microwave engineering*. McGraw-Hill Book Company, USA, 1963.

Índice alfabético

- ángulo crítico, [164](#)
- ángulo de pérdidas eléctricas, [147](#)
- índice de refracción, [164](#)
- BIOT-SAVART, ley de, [82](#)
- DIRICHLET, Problema de, [62](#)
- KIRCHHOFF, ley de corrientes, [78](#)
- LAPLACE, Ecuación de, [61](#)
- NEUMANN, problema de, [63](#)
- POISSON, Ecuación de, [61](#)
- 1era ley de SNELL, [163](#)
- 2da. ley de SNELL, [164](#)

- análisis de FOURIER, [135](#)
- Angulo de BREWSTER, [173](#)
- apertura de haz, [199](#)
- armónicos, [135](#)
- Atenuación, [224](#)
- Atenuación del cable coaxial, [232](#)
- autofunción, [220](#)
- autofunciones, [135](#)
- autoinductancia, [95](#)
- autovalor, [220](#)

- base vectorial, [2](#)

- cálculo de la atenuación, [227](#)
- Cable coaxial, [229](#)
- campo conservativo, [24](#)
- campos irrotacionales, [8](#)
- campos libres, [143](#)
- campos solenoidales, [9](#)

- Capacitancia, [57](#)
- cargas imágenes*, [73](#)
- cargas ligadas de polarización, [51](#)
- celda de YEE, [156](#)
- circulación, [17](#)
- coeficiente de atenuación, [146](#)
- coeficiente de fase, [146](#)
- componente irrotacional, [28](#), [29](#)
- componente solenoidal, [28](#), [31](#)
- condición de Courant, [159](#)
- condición de Lorentz, [128](#)
- condición de no radiación, [197](#)
- condición de propagación, [238](#)
- Condiciones límites de LEONTÓVICH, [179](#)
- condiciones límites de LEONTÓVICH, [227](#)
- conductividad, [77](#)
- conductores, [46](#)
- constante de atenuación, [146](#)
- constante de fase, [146](#)
- constante dieléctrica, [54](#)
- coordenadas curvilíneas ortogonales generalizadas, [2](#)
- Corriente de desplazamiento de MAXWELL, [116](#)
- corriente de magnetización, [92](#)
- corriente eléctrica, [76](#)
- corriente ligada, [92](#)
- curva coordenada, [2](#)

- d' Alembertiano, [127](#)

delta de DIRAC, 16
 densidad de corriente, 76
 densidad de corriente de desplazamiento, 117
 densidad de energía magnética, 121
 densidad de flujo eléctrico, 53
 densidad de flujo magnético, 82
 diagrama de radiación, 198
 dieléctricos, 49
 diferencial de ángulo sólido, 41
 diferencial de camino, 3
 diferencial de volumen, 3
 diferenciales de superficie, 3
 dipolo eléctrico, 47
 dirección del gradiente, 7
 Directividad, 203
 Divergencia de un campo vectorial, 9
 divergencia del campo electrostático, 39
 divergencia del campo magnético, 84

 ecuación de las funciones cilíndricas, 242
 ecuación de BESSEL, 242
 ecuación de POISSON, 29
 ecuación homogénea de HELMHOLTZ, 143
 ecuaciones constitutivas, 138
 ecuaciones constitutivas de la materia, 123
 Ecuaciones de MAXWELL, 117
 ecuaciones de MAXWELL, 123
 ecuaciones vectoriales homogéneas de la onda, 127
 ecuaciones de D'ALEMBERT, 127
 ecuación de continuidad, 77
 eficiencia de radiación, 206
 eficiencia total, 206
 elemento de camino, 3
 elemento de volumen, 3

 elementos de superficie, 3
 energía electrostática, 55
 energía magnética, 121
 espectro, 220

 f.e.m. de generador, 113
 f.e.m. de movimiento, 113
 f.e.m. de transformación, 113
 Fórmulas de FRESNEL, 166
 factor de escala, 2, 3
 factor de pérdidas eléctricas, 147
 fasor campo eléctrico, 135
 fasor campo magnético, 137
 FDTD, 156
 flujo, 9
 Frecuencia de corte, 238
 fuente puntual, 30
 fuentes escalares, 9
 fuentes vectoriales, 16
 fuerza de Lorentz, 111
 fuerza electro-motriz, 110
 fuerza electrostática, 35
 función de Neuman, 242
 función de BESSEL, 241
 función de GREEN, 29, 131
 función de NEUMAN, 241
 funciones cilíndricas, 242
 funciones de BESSEL del primer y segundo tipo, 242
 funciones exponenciales, 242
 funciones trigonométricas, 242

 Ganancia, 206
 Ganancia de potencia de la antena, 205
 Gradiente de un campo escalar, 6
 Guía de onda circular, 239
 Guía de onda rectangular, 233

imanación, 91
 Impedancia característica del cable coaxial, 54
 232
 impedancia de entrada de la antena, 205
 impedancia de onda, 155
 impedancia de onda TE, 221
 impedancia de onda TM, 223
 Incidencia perpendicular, 151
 Incidencia perpendicular en el dominio de
 la frecuencia, 151
 Incidencia perpendicular en el dominio del
 tiempo, 156
 inducción magnética, 82
 inductancia, 95
 intensidad de campo magnético, 93

 ley circuital de AMPERE, 86
 ley de fuerza de AMPERE, 81
 ley de inducción de FARADAY, 115
 ley de inducción de FARADAY, 110
 Ley de Inducción de FARADAY en forma
 diferencial, 115
 Ley de Inducción de FARADAY en forma
 puntual, 115
 Ley de LENZ, 111
 ley de COULOMB, 35
 ley de GAUSS, 41
 ley de OHM, 77
 Leyes de SNELL, 162
 longitud de onda, 144

 método de las perturbaciones, 224
 módulo del gradiente, 7
magic step, 159
 magnetización, 91, 138
 medios anisotrópicos, 54
 medios no homogéneos, 54
 medios no lineales, 54
 medios simples, 54
 modo de propagación, 220
 Modo dominante, 238
 momento dipolar eléctrico, 48
 momento dipolar magnético, 89
 movilidad del electrón, 77

 número de onda, 130
 nivel de radiación, 199
 Onda de corriente, 231
 Onda de voltaje, 231
 onda esférica elemental, 131, 193
 onda plana homogénea, 143, 145
 onda progresiva, 144
 onda progresiva amortiguada, 146
 onda regresiva, 144
 onda regresiva amortiguada, 146
 onda viajera, 144
 ondas TE o H, 214, 219
 ondas TEM, 214, 218
 ondas TM o E, 214, 221
 ondas viajeras, 216

 patrón de radiación, 198
 permitividad, 54
 permitividad absoluta, 54
 permitividad relativa, 54
 PIRE, 199
 plano de incidencia, 162
 polarización, 200
 Polarización eléctrica, 50
 polarización eléctrica, 138
 Polarización paralela, 170
 Polarización perpendicular, 166
 potencia isotrópica radiada equivalente,
 199

potencial electrostático, 43
 potencial vector aproximado en la zona
 lejana, 193
 Potenciales Retardados, 118
 Potenciales retardados, 117
 potenciales retardados, 133
 primer problema de contorno, 222
 primera ley de Snell, 163
 principio de conservación de la carga, 77
 problema de autovalores, 220
 proceso monocromático, 135
 proceso policromático, 135
 profundidad de penetración, 146
 punto de observación, 36
 punto fuente, 36
 radiación, 187
 reactancia de la antena, 205
 Reflexión total, 174
 Resistencia, 80
 resistencia de pérdidas, 205
 resistencia de radiación, 205
 respuesta impulsiva, 29
 Rotacional de un campo vectorial, 16
 rotacional del campo electrostático, 40
 rotacional del campo magnético, 85
salto de rana, 156
 segunda ley de SNELL, 164
 segundo problema de contorno, 220
 serie de FOURIER, 135
 sistema de referencia natural de la onda,
 148
 sistema de referencia principal, 148
 superficies coordenadas, 2
 susceptibilidad eléctrica, 53
 Teoría de imágenes, 73
 Teorema de la Divergencia, 14
 Teorema de la divergencia, 12
 Teorema de la Unicidad, 63
 Teorema de HELMHOLTZ, 27
 Teorema de POYNTING, 124
 Teorema de STOKES, 22
 transformación de coordenadas, 4
 Transformación de la base vectorial, 5
 transformada de FOURIER, 135
 transformada de FOURIER tridimensio-
 nal, 194
 variables coordenadas, 1
 Vector de desplazamiento eléctrico, 53
 vector de magnetización, 91
 vector de onda, 149
 vector de polarización, 200
 vector de radiación, 193
 vector de POYNTING, 124
 Vector Potencial Magnético, 84
 velocidad de fase, 144
 velocidad de grupo, 150
 velocidad de propagación, 133
 zona cercana, 190
 zona intermedia, 191
 zona lejana, 188, 191, 197